Ασκήσεις

1)Αποδείξτε την ταυτότητα: $\left(z_1+z_2+...+z_n\right)^N = \sum_{\substack{k_1,...,k_n\geq 0\\ k_1+...+k_n=N}} \frac{N!}{k_1!...k_n!} z_1^{k_1}...z_n^{k_n}$, $n\geq 2, N\geq 1$

[**Υπόδειξη:** Για $n=2$, έχουμε το γνωστό μας διώνυμο του Newton. Προχωρήστε με επαγωγή στο n]

2)Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό, $a\in U$ και $f:U\to R$ συνάρτηση της κλάσης $C^N\left(N\geq 1\right)$. Αποδείξτε ότι για το διαφορικό $m-$τάξης της f στο $a\left(1\leq m\leq N\right)$ ισχύει: Αν $h=\left(h_1,...,h_n\right)\in R^n$ τότε, $D_m f\left(a\right)\left(h\right)=\sum_{j_1,...,j_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_m}}\left(a\right)\cdot h_{j_1}...h_{j_m} =$

$$= \sum_{\substack{k_1,...,k_n\geq 0\\ k_1+...+k_n=m}} \frac{m!}{k_1!...k_n!} h_1^{k_1}h_2^{k_2}...h_n^{k_n} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\left(a\right)$$

3)Έστω $\mathrm{P}\left(x,y\right)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq m\left(m\in N\right)$. Αποδείξτε ότι η σχέση $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{P}\left(x,y\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m}=0$ έπεται ότι το P είναι ταυτοτικά μηδέν.

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό αποδείξτε την μοναδικότητα των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

4)Έστω $\mathrm{P}\left(x_1,...,x_n\right)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq m$. Αποδείξτε ότι αν, $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{P}\left(x_1,...,x_n\right)}{\left\|x\right\|^m}=0$

($x=\left(x_1,...,x_n\right)$ και $\left\|x\right\|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$), τότε το πολυώνυμο είναι ταυτοτικά μηδέν. Αποδείξτε τώρα την μοναδικότητα των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor για μια συνάρτηση $n-$ μεταβλητών