Ασκήσεις

1) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην επιφάνεια, $z = f(x, y)$ στο σημείο που υποδεικνύεται:

(α) $z = x^3 + y^3 - 6xy, (1, 2, -3)$, (β) $z = \cos x \cdot \cos y, \left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$,

(γ) $z = \cos x \cdot \sin y, \left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$, (δ) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, (1, 0, 1)$

2) Βρείτε ένα μοναδικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\cos xy - e^z - 2 = 0$ στο $(1, \pi, 0)$

3) Έστω $r = (x, y, z)$. Αποδείξτε ότι, $\nabla\left(\frac{1}{\|r\|}\right) = -\frac{r}{\|r\|^3}$ στο $U = R^3 - \{(0,0,0)\}$ και κατόπιν ότι, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\|r\|}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\|r\|}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\|r\|}\right) = 0$.

4) Έστω $f : R^3 \to R$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $a \in R^3$. Αποδείξτε ότι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης $Df(a) : R^3 \to R$ είναι ο γραμμικός υπόχωρος του R^3 που είναι κάθετος στην κλίση $\nabla f(a)$ της f στο a.

5) Υπολογίστε την κλίση ∇f για κάθε μια από τις συναρτήσεις:

(α) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ (β) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

(γ) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, (δ) $f(x, y, z) = \cos x + y^2 + z$

Για κάθε μια από τις παραπάνω συναρτήσεις, ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης στο σημείο $(1,1,1)$;