Ασκήσεις

1 Προσδιορίστε τα διανύσματα ταχύτητας, επιτάχυνσης καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μια από τις παρακάτω καμπύλες για την δοσμένη τιμή του t:
(α) $r(t)=\left(6t,3t^2,t^3\right), t=0$, (b) $\sigma(t)=\left(\sin 3t,\cos 3t,2t^3\right), t=1$ (γ) $\sigma(t)=\left(\sin^2 t, t^2-1,\frac{1}{t}\right), t=1$, (δ) $\sigma(t)=(0,t,0), t=\frac{1}{2}$. Επίσης να βρεθεί το μήκος των καμπύλων των παραδειγμάτων (α) και (β) στο διάστημα $[0,1]$.

2) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$, C^2 καμπύλη με μηδενική επιτάχυνση. Αποδείξτε ότι η σ είναι ευθύγραμμο τμήμα ή σημείο.

3)Να βρεθεί η καμπύλη σ αν $\sigma(0)=(0,-5,1)$ και $\sigma'(t)=\left(t,e^t,t^2\right)$.

(*) 4) Μία διανυσματική συνάρτηση $f:[a,b]\to R^n, f=(f_1,...,f_n)$ λέγεται ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) αν κάθε μια από τις συνιστώσες $f_1,...,f_n$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θέτομε τότε, $\int_a^b f\,dx=\left(\int_a^b f_1dx,...,\int_a^b f_ndx\right)$. Αποδείξτε ότι αν η $f=(f_1,...,f_n)$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε και η , $\|f\|=\sqrt{f_1^2+...+f_n^2}$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει, $\left\|\int_a^b f\,dx\right\|\le\int_a^b\|f\|dx$.

[**Υπόδειξη:** Κάθε μία από τις f_i^2 είναι ολοκληρώσιμη άρα και το άθροισμά τους είναι ολοκληρώσιμη, επειδή η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, έπεται ότι και η $\|f\|$ είναι ολοκληρώσιμη. Καθόσον αφορά την ανισότητα παρατηρούμε ότι αν θέσομε $y=(y_1,...,y_n)$, όπου $y_i=\int_a^b f_idx, 1\le i\le n$, τότε $y=\int_a^b f\,dx$ και $\|y\|^2=\sum_{i=1}^n y_i^2=\sum_{i=1}^n y_i\cdot\int_a^b f_idx=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n y_if_i\right)dx$.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι, $\sum_{i=1}^n y_if_i(t)\le\|y\|\cdot\|f(x)\|, x\in[a,b]$, άρα $\|y\|^2\le\|y\|\cdot\int_a^b\|f\|dx$. Από την οποία έπεται η ζητούμενη ανισότητα].

5)Να υπολογιστεί το μήκος των καμπύλων:

(α) $\sigma(t)=a+r(\cos t,\sin t), t\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right], r>0, a\in R^2$

(β) $\sigma(t)=\left\{\left(t,t^n\right):t\in[0,1]\right\}, n\ge 1$

(γ) $\sigma(t)=\left\{\left(t^n,t^n\right):t\in[0,1]\right\}, n\ge 1$.

6)Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$ μια C^∞ διαφορίσιμη καμπύλη. Υποθέτουμε ότι $\sigma'(t)\neq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$. Το διάνυσμα $\mathrm{T}(t)=\dfrac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$ (εφάπτεται στην σ στο $\sigma(t)$ και επειδή $\|\mathrm{T}(t)\|=1$, το T) λέγεται το <u>μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της σ</u>.

(α) Αποδείξτε ότι $\mathrm{T}'(t)\cdot\mathrm{T}(t)=0$. (Υπόδειξη: Παραγωγίστε την $\mathrm{T}(t)\cdot\mathrm{T}(t)=1$)

(β) Γράψτε ένα τύπο για το $\mathrm{T}'(t)$ συναρτήσει της σ.

7)Έστω f,g δύο πραγματικές C^1 συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[a,b]$, με $0<f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in(a,b)$ και $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$. Έστω h η διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,2b-a]$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$h(t)=\begin{cases}(t,f(t)), & t\in[a,b]\\ (2b-t,g(2b-t)), & t\in[b,2b-a]\end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι η h παριστάνει μια καμπύλη Γ η οποία έχει μήκος.

(β) Εξηγείστε, με την βοήθεια ενός σχήματος, την γεωμετρική σχέση μεταξύ f,g και h.

(γ) Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων $D=\{(x,y): a\le x\le b \text{ και } f(x)\le y\le g(x)\}$ είναι ένα χωρίο του R^2 του οποίου το σύνορο είναι η καμπύλη Γ.

(*) 8) Έστω $f:[a,b]\to R$ κατά τμήματα C^1 συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma(t)=(t,f(t)),t\in[a,b]$ έχει μήκος το οποίο ισούται με

$$\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$

(β) Έστω $f(t)=\begin{cases}t\sin\dfrac{\pi}{t}, & t\in(0,1]\\ 0, & t=0\end{cases}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής $(0,1]$ αλλά ασυνεχής στο 0. Εν συνεχεία δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma(t)=(t,f(t)),t\in[0,1]$ δεν έχει μήκος