Ασκήσεις

1)Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό σύνολο $(n \geq 2)$, $f: U \to R$ συνάρτηση της κλάσης C^3 και $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, ..., n\}$. Αποδείξτε ότι αν $x \in U$ τότε η $\frac{\partial^3 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}}(x)$ δεν αλλάζει τιμή όταν οι δείκτες i_1, i_2, i_3 μετατεθούν με οποιονδήποτε τρόπο. Γενικεύστε για συναρτήσεις της κλάσης C^k $(k \geq 3)$.

[Υπόδειξη Οι $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., n$ είναι συναρτήσεις της κλάσης C^{k-1} αν η f είναι της κλάσης C^k $(k \geq 3)$]

2)Για κάθε μια από τις ακόλουθες συναρτήσεις, εξακριβώστε ότι οι μεικτές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ είναι ίσες: (α) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$,
(β) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2), (x, y) \neq (0,0)$, (γ) $f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0)$,
(δ) $f(x, y) = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right), y \neq 0$.

3)Επαληθεύστε την $f_{xz\omega} = f_{z\omega x}$ για την $f(x, y, z, \omega) = e^{xyz}\sin(x\omega)$.

4)Να βρεθούν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:
(α) $z = \sin(x^2 - 3xy)$ και (β) $z = x^2 y^2 e^{2xy}$

5)Μια συνάρτηση $f: U \subseteq R^2 \to R$ (U ανοικτό) λέγεται <u>αρμονική</u>, αν είναι της κλάσης C^2 και ικανοποιεί την <u>εξίσωση Laplace</u>, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ στο U. Δείξτε ότι οι
.
συναρτήσεις (α) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$, (β) $f(x, y) = e^x \cos y$ και $f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0)$ είναι αρμονικές.

6) Έστω $p > 0$, ορίζουμε $f(x) = x^p$, αν $x > 0$ και $f(x) = 0$ αν $x \leq 0$. Τότε η f είναι της κλάσης $C^{(n)}, n \geq 0$, μόνο αν $n < p$. Έπεται ότι για κάθε $n \geq 0$ υπάρχει συνάρτηση της κλάσης $C^{(n)}$, αλλά όχι της κλάσης $C^{(n+1)}$.

7) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = xy \cdot g(x, y)$, όπου $g: R^2 \to R$ φραγμένη συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Αν $g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, όταν $(x, y) \neq (0,0)$ και $g(0,0) = 0$, αποδείξτε ότι η f είναι της κλάσης C^1 στο R^2.