Ασκήσεις

1)Να εξετασθούν ως προς την διαφορισιμότητα οι συναρτήσεις
$f(x,y)=\max(|x|,|y|)$ και $g(x,y)=\sqrt{|x|\cdot|y|}$, όπου $(x,y)\in R^2$

2)Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)$ και $g(x,y)=e^x(\cos y,\sin y),(x,y)\in R^2$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Να βρεθούν η κλίση της f στο $(a,b)\neq(0,0)$ και ο πίνακας Jacobi της g στο $(a,b)\in R^2$.

3)Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις: $f(x)=\dfrac{1}{\|x\|}, x\in R^n-\{0\}$ και

$g(x)=\dfrac{x}{\|x\|}, x\in R^n-\{0\}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και υπολογίστε την κλίση στο σημείο $a=(a_1,...,a_n)\in R^n-\{0\}$ της f και τον πίνακα Jacobi της g στο ιδιο σημειο.

4)Να εξεταστούν ως προς την διαφορισιμότητα η συνάρτηση
$f:R^n\to \mathrm{B}(0,1)=\{y\in R^n:\|y\|<1\}$: $f(x)=\dfrac{x}{1+\|x\|}$ καθώς και η αντίστροφή της

$g:\mathrm{B}(0,1)\to R^n : g(y)=\dfrac{y}{1-\|y\|}$

(Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα τις f και $g=f^{-1}$, στην περίπτωση που $n=1$ ή $n=2$)

5)Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση εξωτερικό γινόμενο

$$\varphi:R^3\times R^3\to R^3:\varphi(a,b)=a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix} k$$ είναι

διαφορίσιμη στον $R^3\times R^3\cong R^6$ και να υπολογισθεί ο πίνακας Jacobi της f στο $(a,b)\in R^3\times R^3$
($a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3)$ και i,j,k η ορθοκανονική βάση του R^3, δηλαδή $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ και $k=(0,0,1)$).

6)Έστω $f_1, f_2, ..., f_n : R \to R$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Εξετάστε ως προς την ύπαρξη μερικών παραγώγων και διαφορικού την συνάρτηση $F : R^n \to R$ ώστε $F\left(x_1,...,x_n\right) = f_1\left(x_1\right)....f_n\left(x_n\right), x = \left(x_1,...,x_n\right) \in R^n$.

7) Δείξτε ότι για τις ακόλουθες συναρτήσεις υπάρχουν όλες οι κατευθυνόμενες παράγωγοι στο (0.0) αλλά δεν είναι συνεχείς εκεί:

α) $f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ αν } 0 < y < \chi^2 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$,

β) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y}, \ \alpha\nu \ x^2+y \neq 0 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$.