Ακρότατα υπό συνθήκη και οι πολλαπλασιαστές του Lagrange

Ας υποθέσουμε ότι ένας δεδομένος χώρος θερμαίνεται και η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) αυτού του χώρου δίδεται από την συνάρτηση $\mathrm{T}(x,y,z)$. Ας υποθέσουμε ότι η επιφάνεια $z=f(x,y)$ βρίσκεται σ' αυτόν τον χώρο και ότι θέλουμε να βρούμε το σημείο $z_0=f(x_0,y_0)$ αυτού του χώρου όπου η θερμοκρασία είναι μέγιστη (ή ελάχιστη). Με άλλα λόγια ποια είναι η μέγιστη (ή η ελάχιστη) τιμή της Τ κάτω από την συνθήκη (ή περιορισμό) $z=f(x,y)$ και που αυτή η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται;
Ο σκοπός μας σ' αυτήν την παράγραφο είναι να συζητήσουμε μεθόδους που να αντιμετωπίζουν προβλήματα αυτού του τύπου. Μια πολύ κομψή και χρήσιμη μέθοδος για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων αναπτύχθηκε από τον Lagrange.

15.1 Θεώρημα (των πολλαπλασιαστών του Lagrange)
Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό και $f:U\to R$ C^1 συνάρτηση. Έστω ακόμη $g:U\to R$ C^1 συνάρτηση, $\overrightarrow{x_0}\in U$, $g\left(\overrightarrow{x_0}\right)=c$ και S η επιφάνεια στάθμης που ορίζεται από την εξίσωση $g\left(\vec{x}\right)=c$ (δηλαδή $S=\left\{\vec{x}\in U : g\left(\vec{x}\right)=c\right\}$). Υποθέτουμε ότι $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)\neq 0$.
Αν η $f\,|S$, δηλαδή ο περιορισμός της f στο S, έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\overrightarrow{x_0}$, τότε υπάρχει πραγματικός λ ώστε $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)=\lambda\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι $n=3$. Έστω ότι το $\overrightarrow{x_0}=(x_0,y_0,z_0)$ είναι τοπικό μέγιστο για την $f\,|S$, επομένως υπάρχει $\delta>0$ και μια σφαίρα $\mathrm{B}\left(\overrightarrow{x_0},\delta\right)\subseteq U$ ώστε αν $\vec{x}\in\mathrm{B}\left(\overrightarrow{x_0},\delta\right)\bigcap S$ τότε $f\left(\vec{x}\right)\leq f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$. Μπορούμε να υποθέσουμε, εν ανάγκη περιορίζοντας τις f και g στη σφαίρα $\mathrm{B}\left(\overrightarrow{x_0},\delta\right)$ ότι $U=\mathrm{B}\left(\overrightarrow{x_0},\delta\right)$. Όπως γνωρίζουμε το εφαπτόμενο επίπεδο Ε της επιφάνειας S στο $\overrightarrow{x_0}$ ορίζεται από την εξίσωση $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)=0$ (1).
Ο ορισμός αυτός δικαιολογείται, όπως είδαμε στην σχετική παράγραφο, από το γεγονός ότι αν $\gamma:[a,b]\to S$ C^1 καμπύλη της S με $\gamma(0)=\overrightarrow{x_0}$ ($a<0<b$) και $\gamma'(0)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της γ στο $t=0$ τότε το $\gamma'(0)$ είναι κάθετο στο $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ ($\gamma'(0)\perp\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$). Επειδή η $f\,|S$ έχει μέγιστο $\overrightarrow{x_0}$ η $fo\gamma:[a,b]\to S$ έχει μέγιστο στο $t=0$, άρα από το θεώρημα του Fermat του Λογισμού της μιας μεταβλητής $\frac{d}{dt}(fo\gamma)\big|_{t=0}=0$.
Από την άλλη μεριά ο κανόνας της αλυσίδας δίνει ότι $0=\frac{d}{dt}(fo\gamma)\big|_{t=0}=\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)\cdot\gamma'(0)$.
Συμπεραίνουμε από τις παραπάνω παρατηρήσεις ότι το διάνυσμα $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(0)$ της γ, το οποίο είναι βέβαια παράλληλο με το επίπεδο Ε που ορίζεται από την εξίσωση (1).

Ισχυριζόμαστε ότι το $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι <u>κάθετο</u> στο Ε και συνεπώς <u>παράλληλο</u> με το διάνυσμα $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$. Πράγματι, έστω $\vec{v}$ τυχόν μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο με το Ε, επομένως υπάρχει $\vec{x}=(x,y,z)\in \mathrm{E}$ ώστε $\vec{v}=\vec{x}-\overrightarrow{x_0}$. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι το $\vec{v}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης σ της S στο $\sigma(0)=x_0$. Όπως είναι γνωστό, από μια εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης (σελίδα 151), εφόσον $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)\neq 0$ η επιφάνεια S πλησίον του $\overrightarrow{x_0}$ είναι το γράφημα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών έστω $z=h(x,y)$, (δηλαδή υπάρχουν $V\subseteq R^2$ ανοικτό, $\mathrm{I}\subseteq R$ ανοικτό διάστημα με $V\times \mathrm{I}\subseteq U,(x_0,y_0)\in V$ και μοναδική C^1 συνάρτηση $h:V\to \mathrm{I}\subseteq R$ ώστε $h(x_0,y_0)=z_0$ και $g(x,y,h(x,y))=c$ για κάθε $(x,y)\in V$).

Θεωρούμε την καμπύλη που ορίζεται με τον τύπο (όπου $\vec{x}=(x,y,z)\in \mathrm{E}$ ώστε $\vec{v}=\vec{x}-\overrightarrow{x_0}\neq 0$)

$$\sigma(t)=\left(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0),h\left(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0)\right)\right).$$

Πρέπει να είναι σαφές ότι για $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό η σ ορίζεται στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$ και είναι μια C^1 καμπύλη της S. Παρατηρούμε ότι $\sigma(0)=\left(x_0,y_0,h(x_0,y_0)\right)=(x_0,y_0,z_0)=\overrightarrow{x_0}$.

Από τον κανόνα αλυσίδας έπεται ότι

$$\sigma'(0)=\frac{d\sigma}{dt}\Big|_{t=0}=\left(x-x_0,y-y_0,\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right)\ (2)$$

Η συνάρτηση $h:V\subseteq R^2\to R$ είναι C^1 επομένως το γράφημά της έχει εφαπτόμενο επίπεδο στο $\overrightarrow{x_0}=(x_0,y_0,z_0)$ το οποίο έχει εξίσωση της μορφής

$$z=z_0+\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\quad (3)$$

Το επίπεδο που ορίζεται από την (3) ταυτίζεται όμως με το επίπεδο Ε που ορίζεται από την (1), αφού η S και το γράφημα της h πλησίον του $\overrightarrow{x_0}=(x_0,y_0,z_0)$ ταυτίζονται. Με περισσότερη ακρίβεια έχουμε (όπως προκύπτει από τους υπολογισμούς που κάναμε στην εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης της σελίδας 151) ότι $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}\left(\overrightarrow{x_0}\right)}{\frac{\partial g}{\partial z}\left(\overrightarrow{x_0}\right)}$ και $\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}\left(\overrightarrow{x_0}\right)}{\frac{\partial g}{\partial z}\left(\overrightarrow{x_0}\right)}$.

Αντικαθιστώντας αυτές τις δύο ισότητες στην (3) παίρνουμε την (1). Από την (3) και την (2) έπεται αμέσως ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα της σ στο $t=0$ είναι το $\sigma'(0)=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=\vec{v}$. Έπεται, εφόσον η σ είναι καμπύλη της S, ότι $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)\perp \vec{v}$. Ουσιαστικά αποδείξαμε ότι το διάνυσμα $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι κάθετο σε οποιοδήποτε (μη μηδενικό) διάνυσμα παράλληλο του επιπέδου Ε, συνεπώς το $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι πράγματι κάθετο στο Ε.

Εφόσον τα διανύσματα $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ και $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι κάθετα στο ίδιο επίπεδο, είναι μεταξύ τους παράλληλα και άρα αφού $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right) \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι το $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι πολλαπλάσιο του $\nabla g\left(\overrightarrow{x_0}\right)$, που είναι και το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Έπεται προφανώς από το προηγούμενο θεώρημα το ακόλουθο αποτέλεσμα <u>γεωμετρικού</u> χαρακτήρα.

15.2 Πόρισμα. Αν η συνάρτηση f περιορισμένη σε μια επιφάνεια S έχει τοπικό ακρότατο στο $\overrightarrow{x_0}$ τότε το $\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι κάθετο στην S στο $\overrightarrow{x_0}$.

Παρατηρήσεις. 1) Τα προηγούμενα αποτελέσματα μας υποδεικνύουν ότι για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης υπό συνθήκη (περιορισμό) πρέπει να ψάξουμε ανάμεσα σε εκείνα τα $\overrightarrow{x_0}$ που ικανοποιούν τα συμπεράσματα του θεωρήματος ή του πορίσματος. Το αν αυτά είναι πράγματι μέγιστα ή ελάχιστα ή τίποτα από τα δύο, πρέπει να ελεγχθεί με άλλους τρόπους, πχ με γεωμετρικά επιχειρήματα.
2) Ο αριθμός λ που εμφανίζεται στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος ονομάζεται <u>πολλαπλασιαστής του Lagrange</u>.

Το θεώρημα των πολλαπλασιαστών του Lagrange γενικεύεται με τον ακόλουθο τρόπο.

15.3 Θεώρημα. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και $f: U \to R$ C^1 συνάρτηση. Έστω ακόμη $g_1, ..., g_k : U \to R$, $k-$το πλήθος C^1 συναρτήσεις όπου $k < n$ και S η επιφάνεια που ορίζεται από τις εξισώσεις $g_1\left(x_1,...,x_n\right) = c_1$, …., $g_k\left(x_1,...,x_n\right) = c_k$, (δηλαδή $S = \left\{\left(x_1,...,x_n\right) \in U : g_\lambda\left(x_1,...,x_n\right) = c_\lambda, \lambda = 1,2,...,k\right\}$). Έστω $\overrightarrow{x_0} \in S$ ώστε τα διανύσματα $\nabla g_1\left(\overrightarrow{x_0}\right),...,\nabla g_k\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν η f περιορισμένη στην S (δηλαδή η $f|S$) έχει τοπικό ακρότατο τότε υπάρχουν σταθερές $\lambda_1,...,\lambda_k \in R$ ώστε

$$\nabla f\left(\overrightarrow{x_0}\right) = \lambda_1 \nabla g_1\left(\overrightarrow{x_0}\right) + ... + \lambda_k \nabla g_k\left(\overrightarrow{x_0}\right).$$

Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος είναι ανάλογη με την απόδειξη του θεωρήματος των πολλαπλασιαστών του Lagrange και έτσι παραλείπεται.

Παρατήρηση. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για να βρούμε τις θέσεις ακροτάτων τιμών μιας συνάρτησης πάνω σε μια επιφάνεια (ή τομή επιφανειών) πρέπει να επιλύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων, πχ στην περίπτωση του θεωρήματος

15.1 πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1,...,x_n\right)=\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1,...,x_n\right) \\ \text{...} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1,...,x_n\right)=\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1,...,x_n\right) \\ g\left(x_1,...,x_n\right)=c \end{cases}$ ως προς $x_1,...,x_n$ και λ

Παραδείγματα 1) Να βρεθεί σημείο πάνω στην επιφάνεια $z^2-xy=1$ το οποίο είναι πλησιέστερα στο $\mathrm{O}=(0,0,0)$.

Λύση Αυτό που ζητάμε είναι να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ισοδύναμα την συνάρτηση $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ πάνω στην επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $g(x,y,z)=1$, όπου $g(x,y,z)=z^2-xy$. Έχουμε ότι

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\frac{\partial f}{\partial y}=2y,\frac{\partial f}{\partial z}=2z \\ \frac{\partial g}{\partial x}=-y,\frac{\partial g}{\partial y}=-x,\frac{\partial g}{\partial z}=2z\end{gathered}.$$

Θα επιλύσουμε σύμφωνα με το θεώρημα των πολλαπλασιαστών του Lagrange, το σύστημα: $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial z},g(x,y,z)=1\right\}$ ως προς x,y,z και λ.

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους βρίσκουμε το σύστημα

$\left\{2x=\lambda(-y),2y=\lambda(-x),2z=\lambda(2z)\text{ και } z^2-xy=1\right\}$.

Η τρίτη εξίσωση του συστήματος μας δίνει $\lambda=1$ υπό την προϋπόθεση ότι $z\neq 0$. Έτσι οι δύο πρώτες εξισώσεις (για $\lambda=1$) δίνουν $\left\{\begin{matrix}2x=-y\\2y=-x\end{matrix}\right\}$ και το σύστημα αυτό έχει την μηδενική λύση, $x=y=0$. Θέτοντας $x=y=0$ στην τέταρτη εξίσωση βρίσκουμε $z=\pm1$.

Έτσι για $\lambda=1$ έχουμε τις λύσεις: $(0,0,1),(0,0,-1)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $z=0$ τότε η τέταρτη εξίσωση γίνεται $xy=-1$, επομένως τα x και y είναι και τα δύο διαφορετικά του μηδενός και ετερόσημα. Το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων γράφεται, $\left\{\begin{matrix}2x+\lambda y=0\\ \lambda x+2y=0\end{matrix}\right\}$.

Αν το δούμε ως γραμμικό σύστημα των x και y τότε η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η $4-\lambda^2$. Αν $4-\lambda^2\neq0$, τότε $x=y=0$ και αυτό αποκλείεται, επομένως $4-\lambda^2=0\Leftrightarrow\lambda=\pm2$. Η τιμή $\lambda=-2$ αποκλείεται αφού τότε η εξίσωση $2x=\lambda(-y)$ γίνεται $2x=-2(-y)=2y$, συνεπώς $x=y$ (τα x και y οφείλουν να είναι ετερόσημα). Έτσι απομένει να εξετάσουμε την τιμή $\lambda=2$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση $2x=\lambda(-y)$ γίνεται $2x=2(-y)\Rightarrow x=-y$, οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση $xy=-1$ βρίσκουμε ότι $-x^2=-1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$. Συνοψίζοντας έχουμε ότι στην περίπτωση που $z=0$ οι λύσεις του αρχικού συστήματος είναι οι $\lambda=2$ και $(1,-1,0)$ και $(-1,1,0)$. (Παρατηρείστε ότι για όλες τις λύσεις που βρήκατε ισχύει, $\nabla g(x,y,z)\neq 0$)

Οι τιμές της συνάρτησης f στις λύσεις (x,y,z) που βρήκαμε είναι οι ακόλουθες:

$f(1,-1,0)=f(-1,1,0)=2$ και $f(0,0,\pm 1)=1$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $(0,0,1)$ και $(0,0,-1)$ της επιφάνειας $z^2-xy=1$ είναι πλησιέστερα στο $(0,0,0)$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $z^2-xy=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 1\left(=f(0,0,\pm 1)\right)$.

Πράγματι, αν $z^2-xy=1$ τότε $x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+xy+1\geq 1$ αφού $x^2+y^2+xy\geq 0$ για κάθε $x,y\in R$. (Η τελευταία ανισότητα είναι προφανής συνέπεια της ταυτότητας $x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy)$).

2)Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας $x+y=1$ στα οποία η συνάρτηση $f(x,y)=1-x^2-y^2$ παίρνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή υπό την προϋπόθεση ότι $x\geq 0$ και $y\geq 0$.

Λύση Η καταρχήν συνθήκη είναι η $x+y=1$, έτσι θέτομε $g(x,y)=x+y$. Η επί πλέον υπόθεση $x\geq 0$ και $y\geq 0$σημαίνει ότι αναζητούμε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο τμήμα εκείνο της ευθείας $g(x,y)=1$ που συνδέει τα σημεία $a=(1,0)$ και $b=(0,1)$. Επειδή η f είναι συνεχής και το ευθύγραμμο τμήμα $[a,b]\subseteq R^2$ συμπαγές σύνολο η f επιτυγχάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε σημεία του $[a,b]$. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}=-2x, \frac{\partial f}{\partial y}=-2y, \frac{\partial g}{\partial x}=1$ και $\frac{\partial g}{\partial y}=1$

Έτσι έχουμε να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases}-2x=\lambda(1)=\lambda\\ -2y=\lambda(1)=\lambda\\ x+y=1\end{cases}$ η μόνη λύση αυτού του συστήματος είναι $x=y=\frac{1}{2}$ και $\lambda=-1$. Παρατηρούμε ότι

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

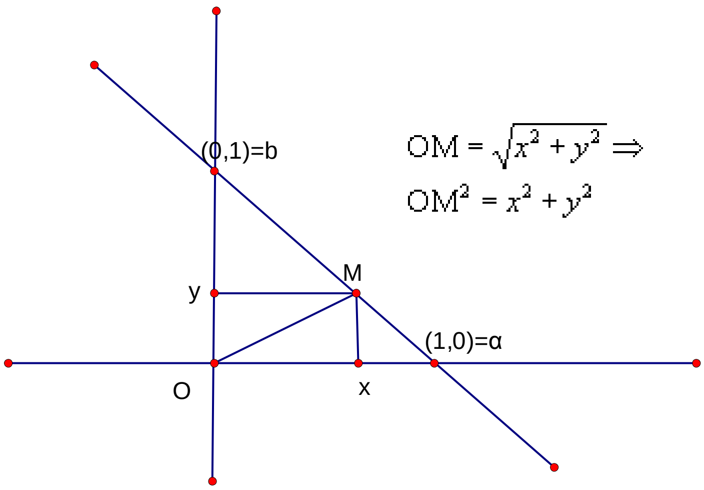
Οι τιμές στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος $[a,b]$ είναι

$f(a)=f(1,0)=1-1^2-0^2=0$

$f(b)=f(0,1)=1-0^2-1^2=0$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της f περιορισμένης στο $[a,b]$ είναι $\frac{1}{2}$στο $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και η ελάχιστη 0 στα σημεία $(1,0)$ και $(0,1)$, αφού $f(x,y)=1-x^2-y^2\geq 0$ για κάθε $(x,y)\in[a,b]$

Σημειώνουμε ότι στα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να καταλήξουμε και γεωμετρικά, όπως φαίνεται και από το σχήμα



3) Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z)=x+y+z$ υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=2$ και $x+z=1$

<u>Λύση</u> Εδώ έχουμε δύο περιορισμούς $g_1(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$ και $g_2(x,y,z)=x+z-1=0$.

Η πρώτη εξίσωση είναι η εξίσωση μιας κυλινδρικής επιφάνειας με βάση τον κύκλο $x^2+y^2=2$ του xy επιπέδου και άξονα τον άξονα των z. Η δεύτερη είναι η εξίσωση ενός επιπέδου που είναι κάθετο στο xz επίπεδο και διέρχεται από τα σημεία $(0,0,1)$ και $(1,0,0)$. Αναζητούμε τα ακρότατα της f στην τομή αυτών των δύο επιφανειών.

Πρέπει να βρούμε x,y,z,λ_1 και λ_2 τέτοια ώστε

$$\left.\begin{aligned}&\nabla f(x,y,z)=\lambda_1\nabla g_1(x,y,z)+\lambda_2\nabla g_2(x,y,z)\\ &\text{και } g_1(x,y,z)=0\\ &\qquad g_2(x,y,z)=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Παρατηρούμε ότι, $\nabla f=(1,1,1)$, $\nabla g_1=2(x,y,0)$ και $\nabla g_2=(1,0,1)$ και επισημαίνουμε ότι τα διανύσματα $\nabla g_1=2(x,y,0)$ και $\nabla g_2=(1,0,1)$είναι γραμμικά ανεξάρτητα, εφόσον το (x,y,z) ανήκει στην τομή των δύο επιφανειών.

Αντικαθιστώντας τις κλίσεις στην πρώτη από τις εξισώσεις του συστήματος (1) καταλήγουμε στο σύστημα πέντε εξισώσεων με πέντε αγνώστους (τους $x,y,z,\lambda_1,\lambda_2$)

$$\left.\begin{aligned}&1=\lambda_1 2x+\lambda_2\cdot 1\\ &1=\lambda_1 2y+\lambda_2\cdot 0\\ &1=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 1\\ &x^2+y^2=2\\ &x+z=1\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Από την τρίτη εξίσωση έπεται ότι $\lambda_2=1$, άρα οι δύο πρώτες γίνονται $2x\lambda_1=0$ και $2y\lambda_1=1$. Αφού από την δεύτερη πρέπει να είναι $\lambda_1\neq 0$ έπεται ότι $x=0$. Άρα από τις δύο τελευταίες εξισώσεις του συστήματος (2) συνάγομε ότι $z=1$ και $y=\pm\sqrt{2}$

Συνεπώς τα ακρότατα που ζητάμε πρέπει να είναι τα $\left(0,\sqrt{2},1\right)$ και $\left(0,-\sqrt{2},1\right)$. Υπολογίζοντας τις τιμές της f έχουμε $f\left(0,-\sqrt{2},1\right)=0-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}<0$ και $f\left(0,\sqrt{2},1\right)=0+\sqrt{2}+1=1+\sqrt{2}>0$. Άρα το μεν $\left(0,-\sqrt{2},1\right)$ δίνει την ελάχιστη τιμή και το $\left(0,\sqrt{2},1\right)$ την μέγιστη τιμή.

Σημειώνουμε ότι το σύνολο $S=\left\{\left(x,y,z\right)\in R^3 : x^2+y^2-2 \text{ και } x+z-1=0\right\}$, δηλαδή η τομή των δύο επιφανειών είναι, όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, κλειστό και φραγμένο σύνολο, άρα συμπαγές. Έτσι η συνεχής συνάρτηση f επιτυγχάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στην S.