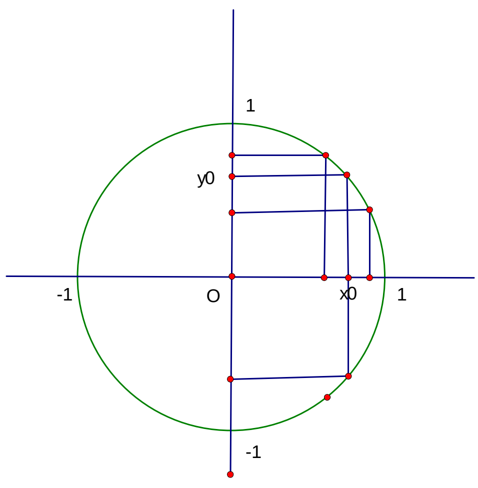
Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Έστω $F : D \subseteq R^2 \to R$ μια (τουλάχιστον) C^1 συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό D και $(x_0, y_0) \in D$ ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Ενδιαφερόμαστε για την ύπαρξη μοναδικής διαφορίσιμης συνάρτησης f ορισμένης σε μια περιοχή V του x_0 ώστε $y_0 = f(x_0)$ και επιπλέον $F(x, f(x)) = 0$ για κάθε $x \in V$. Το ενδιαφέρον μας αυτό δικαιολογείται και από το γεγονός ότι οι επίπεδες καμπύλες ορίζονται συνήθως από εξισώσεις της μορφής $F(x, y) = 0$. Έτσι θα θέλαμε να γνωρίζουμε, αφενός αν οι καμπύλες αυτές είναι <u>τοπικά</u> γραφήματα διαφορίσιμων συναρτήσεων , δηλαδή αν μπορούμε να γράψουμε $y = f(x), x \in \mathrm{I}$ και συνεπώς $F(x, f(x)) = 0, x \in \mathrm{I}$, όπου I διάστημα του R, και αφετέρου να υπολογίσουμε την παράγωγο $\dfrac{df}{dx}$ της f.

Για παράδειγμα, αν $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in R^2 : x_0^2 + y_0^2 = 1$ με $x_0 \neq \pm 1$, μπορούμε να ορίσουμε ως $f(x)$ την κατάλληλη τετραγωνική ρίζα της συνάρτησης $1 - x^2$. Το σημείο y_0 καθορίζει ποια ρίζα πρέπει να πάρουμε: Έτσι αν $y_0 > 0$ τότε η $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in (-1, 1)$ ικανοποιεί την απαίτησή μας ενώ αν $y_0 < 0$ τότε η $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}, x \in (-1, 1)$ είναι η ζητούμενη συνάρτηση. Τα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$ αποκλείονται καθώς οι συναρτήσεις $x \in [-1, 1] \to \sqrt{1 - x^2}$ και $x \in [-1, 1] \to -\sqrt{1 - x^2}$ δεν παραγωγίζονται στα σημεία ± 1 (εξάλλου υπάρχουν σημεία $(x, 0)$ πολύ κοντά στο $(1, 0)$ ή στο $(-1, 0)$ όπου η τετραγωνική ρίζα της $1 - x^2$ δεν ορίζεται).



Παρατηρούμε ότι αν $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ή $(-1, 0)$ τότε $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Επομένως, φαίνεται ότι μια συνθήκη του τύπου $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ είναι αναγκαία ώστε τοπικά να υπάρχει μοναδική διαφορίσιμη συνάρτηση f με $f(x_0) = y_0$ και $F(x, f(x)) = 0$.

Στην γενική περίπτωση, θεωρούμε μια «ομαλή» συνάρτηση $F : D \subseteq R^n \times R^m \to R^m$ και μελετούμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$ ή ισοδύναμα το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ F_2(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \end{cases}$$

Όπου βέβαια, $F=(F_1,...,F_m)$. Ο σκοπός μας είναι να επιλύσουμε το ανωτέρω σύστημα των $m-$εξισώσεων ως προς τους αγνώστους $y_1,y_2,...,y_m$ και να εκφράσομε τις λύσεις ως συναρτήσεις των $x_1,...,x_n$ δηλαδή $y_1=y_1(x_1,...,x_n),\dots,y_m=y_m(x_1,...,x_n)$.

14.2 Θεώρημα (Πεπλεγμένης συνάρτησης). Έστω $D\subseteq R^n\times R^m$ ανοικτό, και $F:D\to R^m$ συνάρτηση της κλάσης C^p ($p\geq 1$), $F=(F_1,...,F_m)$ και $(a,b)\in D$ με $F(a,b)=0$ ($a\in R^n$ και $b\in R^m$). Θεωρούμε τον πίνακα

$$\Delta=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b).....\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b).....\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b)\end{pmatrix}$$

($F(x,y)=(F_1(x,y),...,F_m(x,y))$, όπου $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_m)$, $(x,y)\in D$), και υποθέτουμε για την ορίζουσά του ότι $\det\Delta\neq 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο $U\subseteq R^n$ με $a\in U$ και μια μοναδική συνάρτηση $f:U\to R^m$ της κλάσης C^p ώστε, $f(a)=b$ και $F(x,f(x))=0$ για κάθε $x\in U$. (Εννοείται ότι $U\times f(U)\subseteq D$).

Σημείωση. Το θεώρημα πεπλεγμένης συναρτήσεως μπορεί να αποδειχθεί με εφαρμογή του θεωρήματος αντιστρόφου συναρτήσεως στην συνάρτηση: $(x,y)\in D\subseteq R^n\times R^m\to(x,F(x,y))\in R^n\times R^m$.

Παρατήρηση. Από την εξίσωση $F(x,f(x))=0, x\in U$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της f, δηλαδή τις $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i},...,\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}\right), i=1,2,...,n$, όπου $f=(f_1,...,f_m)$, με χρήση του κανόνα αλυσίδας.

Έστω για απλότητα $m=1$, δηλαδή $f:U\subseteq R^n\to V\subseteq R$ και $F:D\subseteq R^n\times R\to R$. Ορίζουμε, $g:U\to R^n\times R$ με $g=(\pi_1,...,\pi_n,f)$, όπου π_i η i προβολή, $i=1,2,...,n$ και παρατηρούμε ότι, $Fog=F(\pi_1,...,\pi_n,f)$, άρα αν $x=(x_1,...,x_n)\in U$ τότε, $(Fog)(x_1,...,x_n)=F(x_1,...,x_n,f(x_1,...,x_n))=F(x_1,...,x_n,y)$ όπου $y=f(x_1,...,x_n)$.
Έπεται από τον κανόνα αλυσίδας ότι ($\underbrace{U\subseteq R^n\xrightarrow{g}D\subseteq R^n\times R\xrightarrow{F}R}_{Fog}$) αν $1\leq i\leq n$ τότε: $\dfrac{\partial Fog}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial \pi_k}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ (1) αφού, $\dfrac{\partial \pi_k}{\partial x_i}=\begin{cases}0, i\neq k\\ 1, i=k\end{cases}$.

Επειδή όμως, $F\left(x, f\left(x\right)\right)=0$ για κάθε $x \in U$, έπεται ότι $\dfrac{\partial Fog}{\partial x_i}\left(x\right)=0$ για κάθε $x \in U$. Συνεπώς η (1) δίνει $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, όπου ο υπολογισμός γίνεται στα σημεία $x \in U$ με $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(x\right)\neq 0$.

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που $m=1$ ο πίνακας Δ του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης (είναι 1×1 και) είναι ο αριθμός $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(a,b\right)\neq 0$.

Στην γενική περίπτωση οι $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m$ της συνάρτησης $f=\left(f_1,..., f_m\right)$ υπολογίζονται ως εξής. Από τον κανόνα της αλυσίδας για την συνάρτηση $Fog: U\subseteq R^n \to R^m$ όπου $g=\left(\pi_1,...,\pi_n, f_1,..., f_m\right)$ έχουμε για το διαφορικό της Fog στο $x \in U$, $x=\left(x_1,...,x_n\right)$, $0=D\left(Fog\right)\left(x\right)=DF\left(y\right)oDg\left(x\right)$ όπου $y=g\left(x\right)=\left(x_1,...,x_n, f_1\left(x_1,...,x_n\right),..., f_m\left(x_1,...,x_n\right)\right)$

Άρα για τους αντίστοιχους πίνακες Jacobi έχουμε:

$$0=\left[D\left(Fog\right)\left(x\right)\right]=\left[DF\left(y\right)\right]\cdot\left[Dg\left(x\right)\right] \quad \text{ή} \quad 0=\left(A,B\right)\cdot\begin{pmatrix} I \\ C \end{pmatrix} \quad (1),$$

όπου,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

και I ο ταυτοτικός $n\times n$ πίνακας.

Έπεται από την (1) ότι, $0=A+BC$ ή $C=-B^{-1}A$.

Από την τελευταία εξίσωση υπολογίζουμε τις ζητούμενες μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m$ της συνάρτησης f.

Παράδειγμα 1 Έστω ότι δίδεται το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left(\Sigma\right)\ \begin{cases} xu+yv^2=0 \\ xv^3+y^2u^6=0 \end{cases}$$

(α) Μπορεί το (Σ) να επιλυθεί ως προς u και v συναρτήσει των x και y κοντά στα σημεία: (ι) $x=1, y=-1, u=1$ και $v=-1$

και (ιι) $x=0, y=1, u=0, v=0$;

(β) Υπολογίστε την $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ στο $x=1$ και $y=-1$ και $x=0, y=1$, αν υπάρχει.

Λύση Θεωρούμε την συνάρτηση $F: R^2\times R^2 \to R^2, F=\left(F_1, F_2\right)$ όπου, $F_1\left(x,y,u,v\right)=xu+yv^2$ και $F_2\left(x,y,u,v\right)=xv^3+y^2u^6$. Η F είναι της κλάσης C^∞ στο

$R^2 \times R^2 \cong R^4$ και $F(1,-1,1,-1) = \left(1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)^2, 1\cdot(-1)^3 + (-1)^2\cdot 1^6\right) = (0,0)$, επίσης $F(0,1,0,0) = (0,0)$.

Θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μπορούμε να λύσουμε το σύστημα ως προς $u(x,y)$ και $v(x,y)$.

Έτσι θεωρούμε την ορίζουσα, $\det\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix} = 3x^2v^2 - 12y^3u^5v$.

Στο σημείο $(x,y,u,v) = (1,-1,1,-1)$ έχουμε ότι $\det\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$. Έπεται από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης ότι υπάρχει μοναδική λύση του (Σ) ως προς $u(x,y), v(x,y)$ κοντά στο σημείο $(x,y,u,v) = (1,-1,1,-1)$.

Διαφορίζοντας ως προς x τις εξισώσεις του συστήματος (Σ) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xu + yv^2\right) = \frac{\partial(x)}{\partial x}\cdot u + x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial x}\cdot v^2 + y\frac{\partial v^2}{\partial x} = u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2yv\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xv^3 + y^2u^6\right) = \frac{\partial(x)}{\partial x}\cdot v^3 + x\frac{\partial v^3}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial x}\cdot u^6 + y^2\cdot\frac{\partial u^6}{\partial x} = v^3 + 3xv^2\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + 6y^2u^5\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

.

Δηλαδή (Σ΄) $\left\{\begin{array}{l} u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2yv\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v^3 + 3xv^2\frac{\partial v}{\partial x} + 6y^2u^5\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2yv\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v^3 + 6y^2u^5\frac{\partial u}{\partial x} + 3xv^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array}\right\}$

Θέτοντας $x=1, y=-1, u=1$ και $v=-1$ στις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στο σύστημα: $\begin{cases} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ -1 + 6\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$ Απαλείφοντας την $\frac{\partial v}{\partial x}$ βρίσκουμε: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5}{9}$ και $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{7}{9}$ (εννοείται στο σημείο, $(x,y) = (1,-1)$).

Καθόσον αφορά το σημείο $x=0, y=1, u=0$ και $v=0$, παρατηρούμε ότι $\det\Delta = 0$, έτσι το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης <u>δεν</u> μπορεί να αποφανθεί αν οι εξισώσεις του (Σ) επιλύονται μοναδικά σε αυτό το σημείο.

Παρατηρούμε ακόμη ότι η ορίζουσα του συστήματος (Σ΄) συμπίπτει με την $\det\Delta = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix}$ η οποία για $x=0, y=1, u=0, v=0$ μηδενίζεται. Έτσι η $\frac{\partial u}{\partial x}$ στο $x=0, y=1$ δεν υπάρχει.

Σημείωση Διαφορίζοντας ως προς y τις εξισώσεις του (Σ) και θέτοντας στις προκύπτουσες εξισώσεις $x=1, y=-1, u=1$ και $v=-1$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους, $\frac{\partial u}{\partial y}$ και $\frac{\partial v}{\partial y}$ στο $(x,y) = (1,-1)$.

Επανερχόμαστε τώρα στο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου και το επιλύουμε, με την βοήθεια του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, για συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Η γενίκευση στις $n-$ διαστάσεις αφήνεται ως άσκηση.

Εφαρμογή Η επιφάνεια στάθμης έστω S που ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=c_0$, όπου $F(x,y,z)$ είναι μια C^1 συνάρτηση, είναι τοπικά το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης δύο μεταβλητών στο σημείο $(x_0,y_0,z_0)\in S$, υπό την προϋπόθεση ότι $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Πράγματι, έστω ότι η F ορίζεται και είναι C^1 στο ανοικτό υποσύνολο D του R^3 και έστω ακόμη $(x_0,y_0,z_0)\in S$ με $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Άρα μία τουλάχιστον από τις μερικές παραγώγους της F στο (x_0,y_0,z_0) δεν μηδενίζεται. Ας υποθέσουμε ότι $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης στην $g=F-c_0$, συνεπώς $g(x_0,y_0,z_0)=0$ και $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Έπεται ότι υπάρχουν $U\subseteq R^2$ και $V\subseteq R$ ανοικτά σύνολα με $(x_0,y_0)\in U$, $z_0\in V$ και μια μοναδική C^1 συνάρτηση $f:U\to V$ με $f(x_0,y_0)=z_0$ ώστε

$$g(x,y,f(x,y))=0 \text{ για κάθε } (x,y)\in U.$$

Ισοδύναμα: $F(x,y,f(x,y))=c_0$ για κάθε $(x,y)\in U$.

Έτσι η επιφάνεια στάθμης S που ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=c_0$ ταυτίζεται πλησίον του (x_0,y_0,z_0) με το γράφημα μιας C^1-συνάρτησης $f:U\subseteq R^2\to R$. Έπεται ιδιαίτερα ότι αν $\nabla F(x,y,z)\neq 0$ για κάθε $(x,y,z)\in S$ τότε: Για κάθε $(x,y,z)\in S$ η S πλησίον του (x,y,z) ταυτίζεται με το γράφημα μιας C^1-συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Σημειώνουμε ακόμη ότι: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$ και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}.$$

Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε και την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου Ε της S στο (x_0,y_0,z_0):

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\nabla g(x_0,y_0,z_0)=0,$$

(πρβλ και τον σχετικό ορισμό στην παράγραφο για τις επιφάνειες στάθμης.)

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $x^3+3y^2+8xz^2-3z^3y=1$. Να βρεθούν σημεία (x,y,z) της επιφάνειας S πλησίον των οποίων η S ταυτίζεται με το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $z=f(x,y)$.

Λύση Θα χρησιμοποιήσουμε την εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης που συζητήσαμε προηγουμένως.
Έστω $F(x,y,z)=x^3+3y^2+8xz^2-3z^3y-1$. Η F είναι βέβαια C^∞ συνάρτηση (ως πολυωνυμική) και η επιφάνεια S ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=0$.
Ουσιαστικά ο στόχος μας είναι να επιλύσουμε την εξίσωση $F(x,y,z)=0$ ως προς z ώστε το z να εκφράζεται ως συνάρτηση μόνο των μεταβλητών x και y. Από την προηγούμενη εφαρμογή αυτό μπορεί να γίνει κοντά σε εκείνα τα σημεία $(x_0,y_0,z_0)\in S$ ώστε, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ (1). Επειδή, $\dfrac{\partial F}{\partial z}=16xz-9z^2y$, έπεται από την (1) ότι τα ζητούμενα σημεία $(x,y,z)\in S$ είναι εκείνα για τα οποία ισχύει, ότι, $16xz-9z^2y\neq 0\Leftrightarrow z(16x-9zy)\neq 0\Leftrightarrow z\neq 0$ και $16x-9zy\neq 0$. Για παράδειγμα τα σημεία του R^3, $\left(0,1,\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\right)$ και $\left(0,-\dfrac{1}{3},\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)$ ικανοποιούν αυτές τις προϋποθέσεις.