Το θεώρημα του Taylor στη μια μεταβλητή

Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα $a \in \mathrm{I}$ και $f : \mathrm{I} \to R$ $n-$ φορές διαφορίσιμη συνάρτηση στο I, $(n \geq 1)$.

Γράφουμε, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x,a), x \in \mathrm{I}$, όπου $R_n(x,a)$ είναι το υπόλοιπο Taylor (κέντρου a και τάξης n) και

$$\mathrm{P}_n(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

το πολυώνυμο Taylor (κέντρου a και τάξης n) της f. Δηλαδή

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x,a) + R_n(x,a), x \in \mathrm{I}.$$

Αν το x είναι πολύ κοντά στο a το σφάλμα στην προσέγγιση της f στο a γίνεται μικρό, υπό την έννοια ότι, $\lim_{x \to a} \frac{R_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0$.

Πράγματι, για $n = 1$ έχομε ότι, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$ ή με τον παραπάνω συμβολισμό $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \mathrm{P}_1(x,a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{R_1(x,a)}{x-a} = 0$, (δηλαδή, όχι μόνο ισχύει, $\lim_{x \to a}\left(f(x) - \mathrm{P}_1(x,a) \right) = 0$ αλλά και ακόμα περισσότερο $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \mathrm{P}_1(x,a)}{x-a} = 0$).

Προχωρούμε με επαγωγή στο $n \geq 2$. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε συνάρτηση που είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη και έστω $f : \mathrm{I} \to R$ $n-$ φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο Ι και $a \in \mathrm{I}$.

Αν $\mathrm{P}_n(x,a)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της f, επειδή $f(a) = \mathrm{P}_n(a,a)$ έπεται ότι $\lim_{x \to a}\left(f(x) - \mathrm{P}_n(x,a) \right) = f(a) - f(a) = 0$.

Προφανώς ισχύει ότι, $\lim_{x \to a}(x-a)^n = 0$.

Συνεπώς από τον κανόνα L' Hospital έχουμε: $\lim_{x \to a} \frac{R_n(x,a)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x,a)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{1}{n} \frac{f'(x) - \mathrm{P}_n'(x,a)}{(x-a)^{n-1}} =$

$\frac{1}{n} \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - \mathrm{P}_n'(x,a)}{(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$.

Το όριο, $\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - \mathrm{P}_n'(x,a)}{(x-a)^{n-1}} = 0$ από την επαγωγική υπόθεση και εφόσον

(προφανώς) το $\mathrm{P}_n'(x,a)$ είναι το πολυώνυμο Taylor (τάξης $n-1$ στο a) της συνάρτησης f'.

Παράδειγμα. Έστω $f(x)=\dfrac{1}{1-x}, x\neq 1$ τότε $\mathrm{P}_n(x,0)=1+x+\ldots+x^n$ και $R_n(x,0)=\dfrac{x^{n+1}}{1-x}, x\neq 1$

Πράγματι $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}, n\geq 0, x\neq 1$, όπως αποδεικνύεται επαγωγικά, έτσι, $f^{(n)}(0)=n!, n\geq 0$. Συνεπώς $\mathrm{P}_n(x,0)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+x+x^2+\ldots+x^n$.

Επίσης

$$R_n(x,0)=f(x)-\mathrm{P}_n(x,0)=\frac{1}{1-x}-\left(1+x+\ldots+x^n\right)=\frac{1-\left(1+x+\ldots+x^n\right)(1-x)}{1-x}=$$

$$\frac{1-\left(1+x+\ldots+x^n\right)+\left(x+x^2+\ldots+x^{n+1}\right)}{1-x}=\frac{1-1+x^{n+1}}{1-x}=\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Έστω τώρα $\mathrm{I}\subseteq R$ ανοικτό διάστημα $a\in\mathrm{I}$ και $f:\mathrm{I}\to R$ μια συνάρτηση που είναι της τάξης $C^{n+1}, n\geq 0$, τότε το υπόλοιπο Taylor $R_n(x,a)$ παίρνει τις ακόλουθες μορφές: $R_n(x,a)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_a^x (x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)\,dt, x\in\mathrm{I}$ (<u>ολοκληρωτική μορφή</u> του υπολοίπου)

καθώς και την μορφή, $R_n(x,a)=\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}, x\in\mathrm{I}, x\neq a$ για κάποιο ξ μεταξύ x και a (<u>μορφή Lagrange</u> του υπολοίπου).

Περιγράφουμε σύντομα την απόδειξη αυτών των αποτελεσμάτων: Έστω $x\in\mathrm{I}$ με $x\neq a$ το οποίο σταθεροποιούμε . Ορίζουμε μια συνάρτηση $\varphi:\mathrm{I}\to R$ με τον ακόλουθο τρόπο,

$$\varphi(t)=R_n(x,t)=f(x)-\mathrm{P}_n(x,t)=f(x)-\left(f(t)+f'(t)(x-t)+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

. Δηλαδή θεωρούμε το υπόλοιπο Taylor ως συνάρτηση του κέντρου t.

Παρατηρούμε ότι: 1) $\varphi(a)=R_n(x,a)$

και 2) $\varphi(x)=R_n(x,x)=f(x)-\mathrm{P}_n(x,x)=f(x)-f(x)=0$.

Επίσης με <u>παραγώγιση</u> της σχέσης $f(x)=\mathrm{P}_n(x,t)+\varphi(t)=\left(f(t)+f'(t)(x-t)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)+\varphi(t)$ <u>ως προς t</u>,

παίρνουμε τον τύπο: 3) $\varphi'(t)=-\dfrac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n, t\in\mathrm{I}$.

Αποδεικνύουμε τώρα την <u>ολοκληρωτική μορφή</u> του υπολοίπου Taylor: Από το <u>θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού</u> έχουμε: (η φ' συνεχής στο I)

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\int_a^x \varphi'(t)dt=-\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt.$$

Επειδή $\varphi(x)=0$ έπεται η ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου,

$$R_n(x,a)=\varphi(a)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt.$$

Καθόσον αφορά την μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor, εφαρμόζουμε το <u>θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy</u> στο διάστημα με άκρα a και x για τις συναρτήσεις $\varphi(t)$ και $g(t)=(x-t)^{n+1}$ και βρίσκουμε ξ μεταξύ x και a ώστε:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Άρα $\varphi(a)=R_n(x,a)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$ $\left[\varphi(x)=0=g(x)\right]$.

Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy που χρησιμοποιήσαμε στην μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor.

11.1 Θεώρημα (Cauchy) Έστω $\varphi,g:[a,b]\subseteq R\to R$ συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε,

$$\left(\varphi(a)-\varphi(b)\right)\cdot g'(\xi)=\left(g(a)-g(b)\right)\cdot\varphi'(\xi)\qquad(1)$$

Αν $g(a)-g(b)\neq 0$ και $g'(\xi)\neq 0$ τότε η (1) γράφεται ως εξής

$$\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (στην μορφή του θεωρήματος Rolle) στην συνάρτηση $h(x)=\left(\varphi(a)-\varphi(b)\right)\cdot g(x)-\left(g(a)-g(b)\right)\cdot\varphi(x),\ x\in[a,b]$.

Επειδή $h(a)-h(b)=0$, υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $h'(\xi)=0$. Έτσι έπεται η (1).

Σημείωση. Αν $g(x)=x, x\in[a,b]$, τότε $g'(x)=1, x\in[a,b]$ και έτσι έχουμε το συνηθισμένο θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Σειρές Taylor

Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα, $a \in \mathrm{I}$ και $f : \mathrm{I} \to R$ C^{∞} διαφορίσιμη συνάρτηση. Μπορούμε τότε να σχηματίσουμε την σειρά Taylor της f στο a (με κέντρο το $a \in \mathrm{I}$)

$$(1) \quad f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Είναι προφανές ότι η (1) συγκλίνει τουλάχιστον για $x = a$ με άθροισμα $f(a)$. Το ενδιαφέρον βέβαια είναι για ποια άλλα σημεία x του Ι (εκτός του a) η σειρά Taylor συγκλίνει και μάλιστα στην τιμή $f(x)$ της συνάρτησης f. Με άλλα λόγια υπάρχουν $x \in \mathrm{I}$ με $x \neq a$ ώστε

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n;$$

Επειδή προφανώς ισχύει ότι,

$$(3) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x,a), x \in \mathrm{I}, n \in N$$

ο τύπος (2) ισχύει ακριβώς, για εκείνα τα $x \in \mathrm{I}$ ώστε:

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$

Αν για $x \in \mathrm{I}$, ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, τότε λέμε ότι η σειρά Taylor κέντρου a <u>παριστάνει την f στο</u> x.

Παράδειγμα. Έστω $f(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1$ τότε

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, |x| < 1.$$

Πράγματι, όπως αποδείξαμε πριν $f(x) = \mathrm{P}_n(x,0) + R_n(x,0), n \geq 1, x \neq 1$ όπου, $\mathrm{P}_n(x,0) = 1 + x + \ldots + x^n$ και $R_n(x,0) = \frac{x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1$.

Επειδή, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$ για κάθε $|x| < 1$ έπεται το συμπέρασμα.

Παρατηρούμε ότι για $|x| \geq 1$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ αποκλίνει.

Ένα χρήσιμο κριτήριο (ικανή συνθήκη) που εξασφαλίζει ότι η σειρά Taylor της f κέντρου $a \in \mathrm{I}$, παριστάνει την f στο διάστημα Ι είναι το ακόλουθο.

11.2 Θεώρημα Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα, $a \in \mathrm{I}$ και $f : \mathrm{I} \to R$ C^{∞} διαφορίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ ώστε, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$ και για κάθε $n \geq 0$. Τότε η σειρά Taylor της f κέντρου a παριστάνει την f για κάθε $x \in \mathrm{I}$. Δηλαδή $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$.

Απόδειξη: Έστω $x \in \mathrm{I}$ με $x \neq a$. Θεωρούμε την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor. Υποθέτουμε ότι $x > a$ τότε έχουμε:
$$R_n(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt \Rightarrow \left|R_n(x,a)\right| \leq \frac{1}{n!}\int_a^x \left|f^{(n+1)}(t)\right|\cdot|x-t|^n\,dt \leq$$
$$\frac{\mathrm{M}}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt = \frac{\mathrm{M}}{n!}\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \mathrm{M}\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
(Ανάλογα εργαζόμαστε αν $x < a$).
Αν χρησιμοποιούσαμε την μορφή Lagrange θα είχαμε ότι, $R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ για κάποιο ξ_n μεταξύ a και x. Συνεπώς $\left|R_n(x,a)\right| \leq \mathrm{M}\cdot\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Εφαρμογές: 1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in R$.

Πράγματι, $\left(e^x\right)' = e^x$ για κάθε $x \in R \Rightarrow \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$ για κάθε $x \in R$ για κάθε $n \geq 0$.
Συνεπώς αν $f(x) = e^x,\ x \in R$ τότε $f^{(n)}(0) = e^0 = 1, n \geq 0$.
Έπεται ότι $\mathrm{P}_n(x,0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, n \geq 0, x \in R$
Επειδή αν $a > 0$ τότε η $f^{(n)} = f, n \geq 0$ είναι φραγμένη στο διάστημα $[-a,a]$, έπεται από την προηγούμενη πρόταση ότι $\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$ για κάθε $x \in [-a,a]$. Επειδή $a > 0$ τυχών θετικός αριθμός έχουμε το συμπέρασμα.

2) Επειδή, όπως αποδεικνύεται με επαγωγή, $\eta\mu^{(2n+1)}x = (-1)^n \cdot \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu^{(2n)}x = (-1)^n \cdot \eta\mu x, n \geq 0, x \in R$ (συνεπώς, $\eta\mu^{(2n)}0 = 0, \eta\mu^{(2n+1)}0 = (-1)^n$ και $\left|\eta\mu^{(n)}x\right| \leq 1$ για κάθε $x \in R$, για κάθε $n \geq 0$) από την προηγούμενη πρόταση βρίσκουμε, $\eta\mu x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x \in R$
Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in R$ τότε έχουμε, $\sigma\upsilon\nu^{(2n)}x = (-1)^n \cdot \sigma\upsilon\nu x$ και $\sigma\upsilon\nu^{(2n+1)}x = (-1)^{n+1} \cdot \eta\mu x, x \in R, n \geq 0$
Έτσι βρίσκουμε $\sigma\upsilon\nu^{(2n)}0 = (-1)^n$ και $\sigma\upsilon\nu^{(2n+1)}0 = 0, n \geq 0$, επίσης $\left|\sigma\upsilon\nu^{(n)}x\right| \leq 1$ για κάθε $x \in R$, για κάθε $n \geq 0$.

Έπεται ότι: $$\sigma\upsilon\nu x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in R.$$

<u>Σημείωση.</u> Με ανάλογες μεθόδους υπολογίζουμε τα ακόλουθα αναπτύγματα:

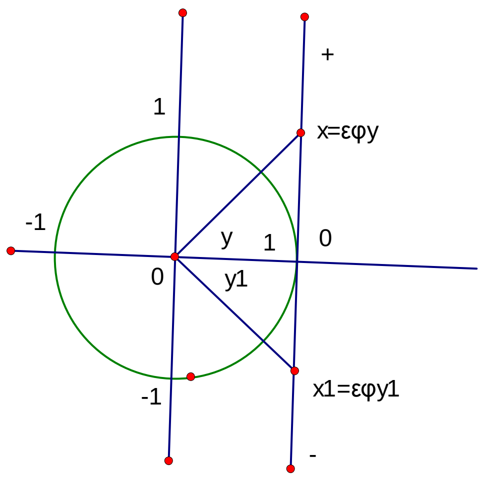
1) $\log(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad |x|<1$ (ακριβέστερα $x\in(-1,1]$.

2)Αν $a\in R$, τότε $(1+x)^{a}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}\cdot x^{n},\quad |x|<1$, όπου,

$$\binom{a}{n}=\begin{cases}1, n=0\\ \dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}, n\geq 1\end{cases}$$

3) $\tau o\xi\varepsilon\varphi x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1]$. Η συνάρτηση $y=\tau o\xi\varepsilon\varphi x$ ορίζεται ως εξής:

$$x\in R \text{ και } \tau o\xi\varepsilon\varphi x=y\Leftrightarrow \varepsilon\varphi y=x \text{ και } y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$



$$x\in R\to\tau o\xi\varepsilon\varphi x=y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Υπενθυμίζουμε ότι, $\tau o\xi'\varepsilon\varphi(x)=\frac{1}{1+x^{2}}, x\in R$.