Κλίση και επιφάνειες στάθμης μιας συνάρτησης

Έστω $D \subseteq R^3$ ανοικτό και $f : D \subseteq R^3 \to R$, C^1 συνάρτηση. Αν κ πραγματική σταθερά (με $\kappa \in f(D)$) τότε η εξίσωση

$$f(x, y, z) = \kappa$$

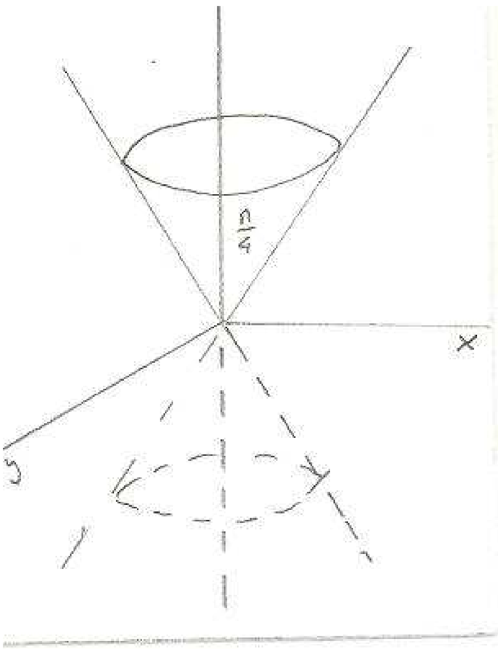
ορίζει μια επιφάνεια S στον R^3 (το υποσύνολο $S = f^{-1}(\{\kappa\})$ του D). Η S ονομάζεται συνήθως επιφάνεια στάθμης της f.

Παραδείγματα: 1)Έστω $f : R^3 \to R : f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Αν $\kappa > 0$ τότε η εξίσωση, $x^2 + y^2 + z^2 = \kappa$ ορίζει την επιφάνεια μιας σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $r = \sqrt{\kappa}$ στον R^3. Ιδιαίτερα αν $\kappa = 1$, έχουμε την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του R^3. Η συνάρτηση f είναι βέβαια C^∞.

2) Έστω $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, (x, y, z) \in R^3$ ($f : R^3 \to R$ είναι μια $C^\infty -$ συνάρτηση). Αν $\kappa = 0$, η εξίσωση $x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$ ορίζει έναν διπλό κώνο στο R^3 με κορυφή στο $(0,0,0)$.

Πράγματι, $z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Η εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ορίζει έναν ορθό κώνο που βρίσκεται πάνω από το xy επίπεδο και η $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ορίζει τον «κατά κορυφήν» κώνο που βρίσκεται κάτω από το xy επίπεδο. Η επιφάνεια αυτή σχηματίζεται με την περιστροφή μιας ευθείας που διέρχεται από το $(0,0,0)$ περί τον άξονα των z και σε γωνία $\frac{\pi}{4}$ με αυτόν.



3)Έστω $f(x,y,z)=ax+\beta y+\gamma z$, όπου $a,\beta,\gamma\in R$ με $|a|+|\beta|+|\gamma|>0$. Αν $\kappa\in R$ τότε η εξίσωση $ax+\beta y+\gamma z=\kappa$, ορίζει ένα επίπεδο Ε στον R^3 κάθετο στο διάνυσμα (a,β,γ). Είναι βέβαια προφανές ότι η f είναι C^∞ στον R^3.

4)Έστω $D\subseteq R^2$ ανοικτό και $g:D\to R$ C^1 συνάρτηση. Θέτουμε $z=g(x,y),(x,y)\in D$ και ορίζουμε μια συνάρτηση $f:D\times R\to R$ θέτοντας, $f(x,y,z)=z-g(x,y),(x,y)\in D,z\in R$.
Η f είναι C^1 συνάρτηση στο $D\times R\subseteq R^3$, αφού οι μερικές παράγωγοί της, $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}=1$, είναι συνεχείς συναρτήσεις.
Είναι απλό να ελέγξουμε ότι η επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y,z)=0\Leftrightarrow z=g(x,y)$ συμπίπτει με το γράφημα $G(g)$ της g.
Πράγματι,
$S=\{(x,y,z)\in D\times R: f(x,y,z)=0\}=\{(x,y,z)\in D\times R: z=g(x,y)\}=$
$\{(x,y,g(x,y)):(x,y)\in D\}=G(g)$. (Σημειώνουμε ότι το $D\times R$ είναι ανοικτό υποσύνολο του R^2.)

Παρατήρηση. Ο παραπάνω ορισμός μπορεί βέβαια να διατυπωθεί για κάθε $n\geq 2$ και κάθε C^1 συνάρτηση $f:U\subseteq R^n\to R$. Αν $\kappa\in R$ τότε το σύνολο των σημείων $x=(x_1,...,x_n)\in R^n: f(x)=\kappa$, ορίζεται ως το <u>σύνολο στάθμης</u> της f. Αν $n=2$, μιλάμε για μια <u>καμπύλη στάθμης</u> και αν $n=3$ για μια <u>επιφάνεια στάθμης</u>.
Για παράδειγμα, αν $f(x,y)=x^2+y^2$ και $\kappa>0$, τότε η καμπύλη στάθμης που ορίζει η εξίσωση $x^2+y^2=\kappa$ είναι ο κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r=\sqrt{\kappa}$. Παρατηρούμε ότι το παράδειγμα 4 γενικεύεται και για C^1 συναρτήσεις $g:D\subseteq R^n\to R$.

10.1 Πρόταση. Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό , $x_0\in U$ και $f:U\to R$ συνάρτηση διαφορίσιμη στο x_0. Αν $\nabla f(x_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)\neq 0$, τότε η κλίση $\nabla f(x_0)$ δείχνει προς εκείνη την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η f αυξάνει ταχύτερα.

Απόδειξη: Έστω $\eta\in R^n$ με $\|\eta\|=1$. Ο ρυθμός μεταβολής της f στο x_0 επί της ευθείας $\ell(t)=x_0+t\eta,t\in R$ δίνεται από την παράγωγο της f στο x_0 στην κατεύθυνση η, δηλαδή την ποσότητα , $\nabla f(x_0)\cdot\eta(=Df(x_0)(\eta))$.
Όμως $\nabla f(x_0)\cdot\eta=\|\nabla f(x_0)\|\cdot\|\eta\|\cdot\cos\theta=\|\nabla f(x_0)\|\cdot\cos\theta$ όπου $\theta\in[0,\pi]$ η γωνία των διανυσμάτων η και $\nabla f(x_0)$. Αν $\theta=0$ τότε $\cos\theta=1$ και ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος. Δηλαδή έχουμε τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής όταν τα διανύσματα η και $\nabla f(x_0)$ είναι παράλληλα και <u>ομόρροπα.</u>

Παραδείγματα. 1) Σε ποια κατεύθυνση ξεκινώντας από το $(0,1)$ αυξάνει ταχύτερα η $f(x,y)=x^2-y^2$;

Λύση. $x_0=(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \frac{\partial f}{\partial y}=-2y$. Άρα $\nabla f(0,1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right)=(0,-2)\neq(0,0)$. Έτσι η f αυξάνει ταχύτερα στην κατεύθυνση $\nabla f(0,1)=-2\cdot(0,1)=-2j$.

2)Έστω $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2},(x,y,z)\neq(0,0,0)$. Ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης για την f στο σημείο $(1,1,1)$;

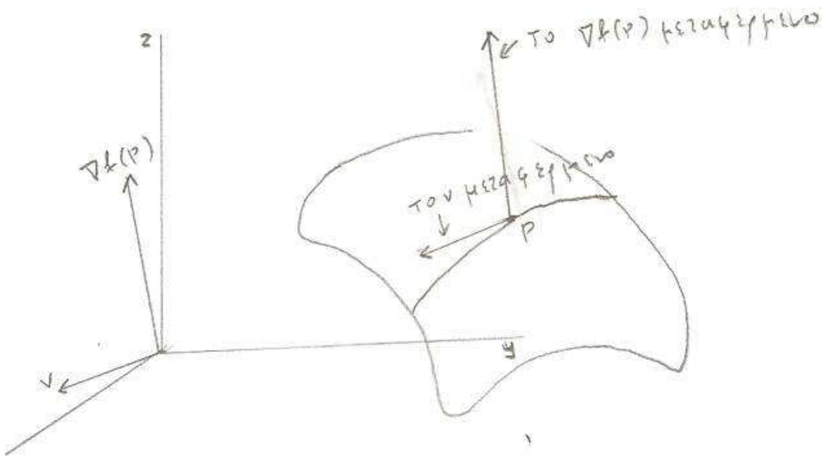
Λύση Οι μερικές παράγωγοι της f στο ανοικτό $U=R^3-\{(0,0,0)\}$ είναι οι $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

Συνεπώς, $\nabla f(1,1,1)=\left(-\frac{2\cdot 1}{3^2},-\frac{2\cdot 1}{3^2},-\frac{2\cdot 1}{3^2}\right)=-\frac{2}{9}(1,1,1)$. Έτσι η f αυξάνει ταχύτερα στην κατεύθυνση $-\frac{2}{9}(1,1,1)$.

10.2 Θεώρημα. Έστω $D\subseteq R^3$ ανοικτό και $f:D\to R$ C^1 συνάρτηση και $P=(x_0,y_0,z_0)$ ένα σημείο στην επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y,z)=\kappa$ όπου κ σταθερά, ($\kappa\in f(D)$). Τότε το διάνυσμα $\nabla f(P)$ είναι κάθετο στην S υπό την ακόλουθη έννοια: Αν v είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο $t=0$ μιας C^1 καμπύλης $c:[a,b]\to S$ με ($0\in(a,b)$ και) $c(0)=P$, τότε

$$\nabla f(P)\cdot v=0.$$

Απόδειξη: Από την υπόθεσή μας, $c([a,b])\subseteq S$, επομένως $f(c(t))=\kappa$ για κάθε $t\in[a,b]$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα της c στο $c(0)$ είναι το $v=c'(0)$. Εφαρμόζουμε τον <u>κανόνα αλυσίδας</u> στην σύνθετη συνάρτηση $foc:[a,b]\to R$ και στο $t=0$, οπότε έχουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η foc είναι <u>σταθερή</u> συνάρτηση, ότι $0=\frac{d(foc)}{dt}(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(c(0))\cdot\frac{dx}{dt}(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(c(0))\cdot\frac{dy}{dt}(0)+\frac{\partial f}{\partial z}(c(0))\cdot\frac{dz}{dt}(0)=$
$=\nabla f(c(0))\cdot c'(0)=\nabla f(P)\cdot v$ (όπου $c(t)=(x(t),y(t),z(t)),t\in[a,b]$



<u>Γεωμετρική σημασία της κλίσης</u>: Το ∇f είναι <u>ορθογώνιο</u> στην επιφάνεια όπου η f είναι σταθερή.

Σημείωση Το v και $\nabla f\left(P\right)$ μεταφέρονται παράλληλα ώστε να αρχίζουν από το $P=\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

Παρατηρήσεις: 1) Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει για κάθε C^1 συνάρτηση $f: D \subseteq R^n \to R$, ($D \subseteq R^n$ ανοικτό) με $n \geq 2$. Στην περίπτωση $n=2$, η $f\left(x, y\right)=\kappa$ ορίζει μια καμπύλη $C=f^{-1}\left(\left\{\kappa\right\}\right) \subseteq D$, την καμπύλη στάθμης της f.

2) Αν $f: D \subseteq R^n \to R$, ($D \subseteq R^n$ ανοικτό) είναι C^1 συνάρτηση, τότε η διανυσματική συνάρτηση,

$$\nabla f: D \subseteq R^n \to R^n: x \in D \to \nabla f\left(x\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x\right)\right) \in R^n$$

ονομάζεται <u>διανυσματικό πεδίο κλίσεων της f</u> και είναι βέβαια <u>συνεχής</u>. Η συνάρτηση αυτή έχει μεγάλη <u>γεωμετρική σημασία</u> καθώς μας δείχνει συγχρόνως δύο πράγματα, 1ον την κατεύθυνση στην οποία η f αυξάνει <u>ταχύτερα</u> και 2ον την κατεύθυνση που είναι <u>ορθογώνια</u> στις επιφάνειες στάθμης της f.

Από την προηγούμενη συζήτηση οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

10.3 Ορισμός Έστω $f: D \subseteq R^3 \to R$ C^1 συνάρτηση ($D \subseteq R^3$ ανοικτό) και S μια επιφάνεια στάθμης της f, δηλαδή S ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $f\left(x, y, z\right)=\kappa$. Το <u>εφαπτόμενο επίπεδο</u> της S σε ένα σημείο $P=\left(x_0, y_0, z_0\right)$ της S, ορίζεται από την εξίσωση,

$$\nabla f\left(P\right) \cdot \left(X-P\right)=0, \text{ αν } \nabla f\left(P\right) \neq 0, \quad \mathrm{X}=\left(x, y, z\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\left(P\right)\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(P\right)\left(y-y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(P\right)\left(z-z_0\right)=0$$

Με περισσότερη ακρίβεια το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P είναι το σύνολο,

$\mathrm{E} = \{ x \in R^3 : \nabla f(x) \cdot (x - P) = 0 \}$ Παρατηρούμε ότι αν c είναι μια C^1 καμπύλη της S με $c(0) = P$, τότε το σημείο $x = P + c^{'}(0)$ ανήκει στο Ε.

Σημειώνουμε ότι στο προηγούμενο θεώρημα όπως και στον παραπάνω ορισμό θα μπορούσαμε εξίσου καλά να είχαμε εργασθεί και στις δύο ή και στις $n-$ διαστάσεις, με τις προφανείς τροποποιήσεις.

Παρατήρηση. Έστω $D \subseteq R^2$ ανοικτό και $g : D \to R$ C^1 συνάρτηση. Όπως είδαμε στο παράδειγμα (4) η g ορίζει φυσιολογικά μια C^1 συνάρτηση, $f : D \times R \to R$, θέτοντας $f(x,y,z) = z - g(x,y), (x,y,z) \in D \times R$. Επίσης παρατηρήσαμε ότι η επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y,z) = 0$ συμπίπτει με το γράφημα $G(g)$ της g.

Περαιτέρω παρατηρούμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $P = (x_0, y_0, z_0)$, όπου $\nabla f(P) \neq 0$, όπως ορίστηκε προηγουμένως, συμπίπτει με τον ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της g στο $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ (πρβλ. τις παρατηρήσεις μετά τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης).

Πράγματι , $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$ και $\frac{\partial f}{\partial z}(P) = 1$. Συνεπώς,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + z - z_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $z = x^2 y + y + x$ στο σημείο $P = (1,0,1)$. Έστω $f(x,y,z) = z - (x^2 y + y + x)$, θεωρούμε την επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση, $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = x^2 y + y + x$. Το $P = (1,0,1) \in S$, η κλίση της f στο (x,y,z) είναι $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (-2xy, -x^2 - 1, 1)$. Επομένως, $\nabla f(P) = (-1, -2, 1)$.

Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην S στο σημείο $P = (1,0,1)$. Το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα είναι το $\eta = \frac{\nabla f(P)}{\| \nabla f(P) \|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1)$