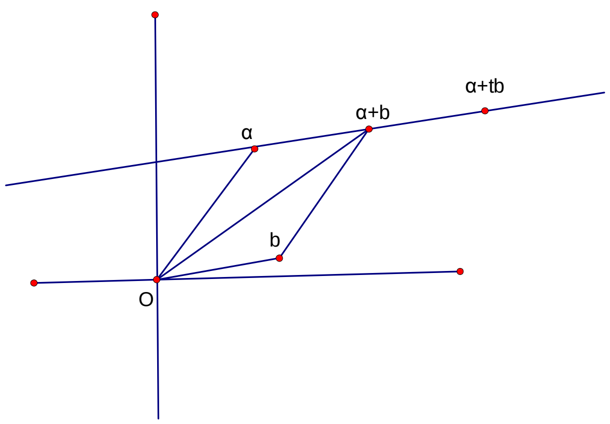
Καμπύλες στον R^n

9.1 Ορισμός Μια καμπύλη στον R^n είναι μια συνεχής συνάρτηση $\sigma : \mathrm{I} \subseteq R \to R^n$ όπου I διάστημα (συνήθως κλειστό και φραγμένο) στον R.
Συνήθως φανταζόμαστε την μεταβλητή $t \in \mathrm{I}$ ως τον χρόνο και την καμπύλη $\sigma(\mathrm{I})$ ως την τροχιά ενός υλικού σημείου με διάνυσμα θέσης το $\sigma(t)$ κατά την χρονική στιγμή t.
Αν $\mathrm{I} = [a,b]$, το $\sigma(a)$ είναι το αρχικό σημείο και το $\sigma(b)$ τελικό σημείο της σ. Το $\sigma([a,b])$ ονομάζεται και ίχνος της καμπύλης και συμβολίζεται με $[\sigma]$.
Έστω $\mathrm{I} = [a,b]$ και $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Η σ λέγεται διαφορίσιμη (αντιστοίχως C^1) αν οι συναρτήσεις $t \in [a,b] \to x_i(t) \in R$ για κάθε $i = 1,2,\dots,n$ είναι διαφορίσιμες (αντιστοίχως C^1) όπου $n \geq 1$. Στην περίπτωση αυτή θέτομε $\sigma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)), t \in [a,b]$.

Σημείωση. Αν $\sigma : [a,b] \to R^n$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη και $a < t_0 < b$ τότε το διαφορικό της σ στο t_0 είναι: $D\sigma(t_0)(h) = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix} \cdot h, h \in R$

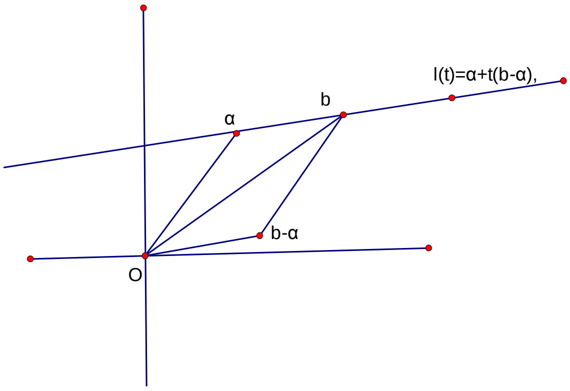
Επίσης πρέπει να είναι σαφές ότι: $\sigma'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h}$.(Πρβλ. τις παρατηρησεις 5 μετα τον Ορισμο 5.4 και 3 στην παραγραφο για τον κανονα της αλυσιδας.)
Η $\sigma : [a,b] \to R^n$, $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ λέγεται κατά τμήματα C^1, αν υπάρχει μια διαμέριση $\mathrm{P} = \{t_0 = a < \dots < t_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε ο περιορισμός $\sigma \| [t_{k-1}, t_k]$ να είναι C^1 στο $[t_{k-1}, t_k]$ για κάθε $k = 1,2,\dots,n$

Παραδείγματα: 1) Έστω $a, b \in R^2$ με $b \neq 0$. Η ευθεία που διέρχεται από το a και έχει την διεύθυνση του b είναι η $l(t) = a + tb, t \in R$.

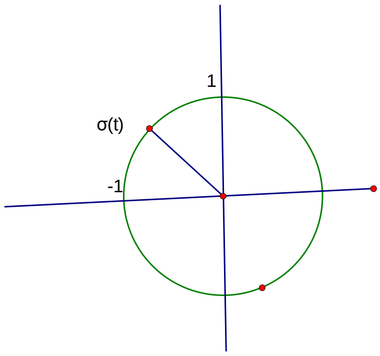


Η l διέρχεται από το a και είναι παράλληλη με το b.
Η l είναι C^1 αφού $l'(t) = b, t \in R$

2)Το <u>ευθύγραμμο τμήμα</u> από το a στο b, όπου $a,b \in R^n$ είναι η καμπύλη $\sigma(t) = (1-t)a + tb = a + t(b-a), \quad t \in [0,1]$
την καμπύλη αυτή την συμβολίζουμε και με $[a,b]$.

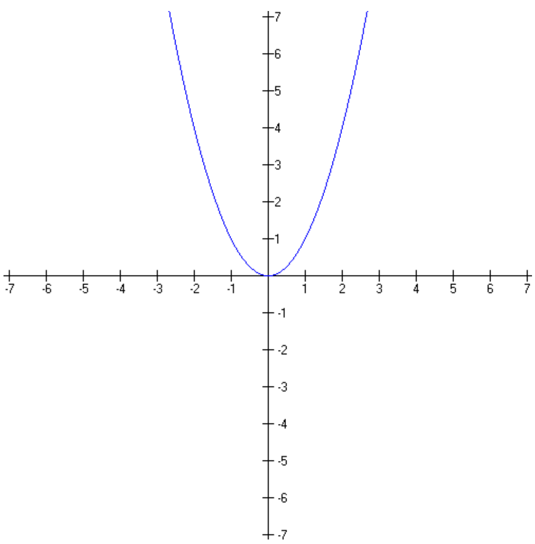


Είναι σαφές ότι το $[a,b]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας $\sigma(t) = a + t(b-a), t \in R$ (αν $a \neq b$). Επίσης $\sigma^{'}(t) = b - a, t \in [0,1]$, άρα η σ είναι C^1 καμπύλη.



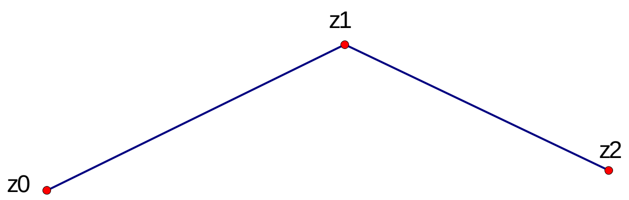
3) Αν $a = (a_1, a_2) \in R^2$ και $r > 0$. Ο κύκλος κέντρου a και ακτίνας r είναι η καμπύλη $\sigma(t) = a + r(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ ή $\sigma(t) = (a_1 + r\cos t, a_2 + r\sin t)$. Η καμπύλη σ είναι C^1, αφού $\sigma'(t) = r(-\sin t, \cos t), t \in [0, 2\pi]$
Ειδικότερα ο μοναδιαίος κύκλος στο επίπεδο είναι ο $\sigma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$, $a = (0,0), r = 1$

4) Η καμπύλη $\sigma(t) = (t, t^2), t \in R$ έχει ως ίχνος το γράφημα της παραβολής $f(x) = x^2, x \in R$. Η σ είναι C^1 αφού $\sigma'(t) = (1, 2t), t \in R$.



5) Έστω $z_0, z_1, ..., z_n \in R^k$. Η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα $z_0, z_1, ..., z_n$ είναι η καμπύλη του $R^k, \gamma:[0,n] \to R^k$, $\gamma(t) = (\lambda + 1 - t) z_\lambda + (t - \lambda) z_{\lambda+1}$, $t \in [\lambda, \lambda+1]$, $\lambda = 0,1,...,n-1$. Η γ είναι προφανώς κατά τμήματα C^1 αφού αν $t \in [\lambda, \lambda+1]$, τότε $\gamma'(t) = z_{\lambda+1} - z_\lambda$.

Σημείωση Ειδικότερα αν $k = 2$ και z_0, z_1, z_2 είναι τρία σημεία του R^2 που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα z_0, z_1, z_2 είναι μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη η οποία δεν είναι C^1. Πράγματι οι πλευρικές παράγωγοι στο z_1 υπάρχουν αλλά διαφέρουν, αφού $\gamma'(t) = z_1 - z_0$ για $t \in [0,1]$ και $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ για $t \in [1,2]$ και $z_1 - z_0 \neq z_2 - z_1$

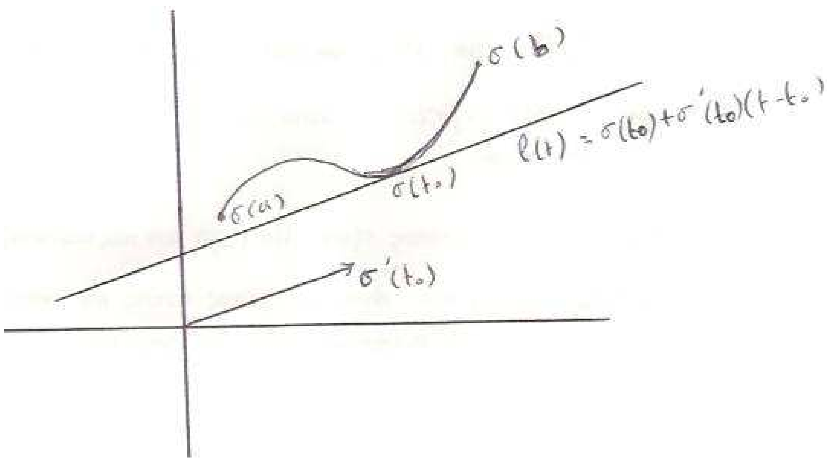


$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-t) z_0 + t z_1, t \in [0,1] \\ (2-t) z_1 + (t-1) z_2, t \in [1,2] \end{cases}$$

Η καμπύλη γ με κορυφές τα $z_0, z_1, ..., z_n$ και την παραμέτρηση που δίνουμε παραπάνω συμβολίζεται και με $\mathrm{P} = [z_0, z_1] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n]$.

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου καμπύλης. Έστω $\sigma:[a,b] \to R^n$ διαφορίσιμη καμπύλη και $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\sigma'(t_0) \neq 0$.

Η ευθεία $\ell(t) = \sigma(t_0) + \sigma'(t_0)(t - t_0), t \in R$, η οποία διέρχεται από το $\sigma(t_0)$ και έχει την διεύθυνση του διανύσματος $\sigma'(t_0)$ ονομάζεται η <u>εφαπτομένη</u> της καμπύλης σ στο $\sigma(t_0)$. Το δε διάνυσμα $\sigma'(t_0)$ ονομάζεται το <u>εφαπτόμενο</u> διάνυσμα της σ στο $\sigma(t_0)$.



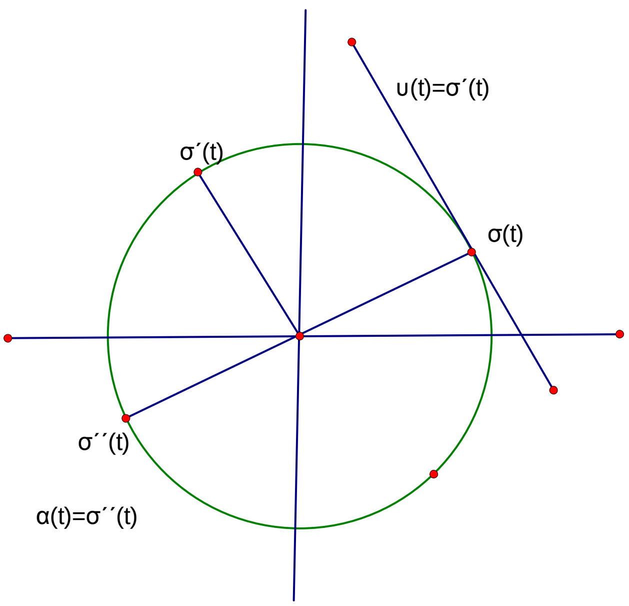
Ο ορισμός αυτός δικαιολογείται ως εξής: ο λόγος $\dfrac{\sigma(t_0+h)-\sigma(t_0)}{h}$ όπου $h\neq 0$ (η μέση διανυσματική ταχύτητα του $\sigma(t)$ στο διάστημα $[t_0,t_0+h]$) είναι ένα διάνυσμα παράλληλο με το διάνυσμα με αρχή στο $\sigma(t_0)$ και τέλος στο $\sigma(t_0+h)$. Όταν το $h\to 0$, αυτή η παράσταση τείνει στο διάνυσμα $\sigma'(t_0)$ (της στιγμιαίας ταχύτητας).

Ο ακόλουθος ορισμός είναι τώρα φυσιολογικός:

9.2 Ορισμός. Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$ μια C^1- καμπύλη όπου $\sigma(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Το διάνυσμα ταχύτητας στο $\sigma(t)$ είναι το $\upsilon(t)=\sigma'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ και το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι ίσο με $s(t)=\|\sigma'(t)\|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$.
Ως επιτάχυνση του υλικού σημείου ορίζουμε το διάνυσμα: $a(t)=\sigma''(t)$ (αν η σ είναι δύο φορές διαφορίσιμη στο $[a,b]$).

Παραδείγματα: 1) Έστω $a,b\in R^3$ και $\sigma(t)=(1-t)a+tb, t\in[0,1]$ τότε $\sigma'(t)=b-a, t\in[0,1]$, $\|\sigma'(t)\|=\|b-a\|$ και $a(t)=0, t\in[0,1]$, δηλαδή έχουμε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

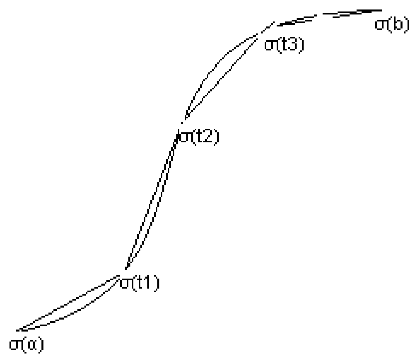
2) Έστω $\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$. Τότε $\upsilon(t)=\sigma'(t)=(-\sin t,\cos t), t\in[0,2\pi]$ και $s(t)=\|\sigma'(t)\|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}=1, t\in[0,2\pi]$. Παρατηρούμε ότι, $\sigma(t)\cdot\upsilon(t)=\sigma(t)\cdot\sigma'(t)=(\cos t,\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t)=-\cos t\cdot\sin t+\sin t\cdot\cos t=0$, $t\in[0,2\pi]$. Έτσι το διάνυσμα της ταχύτητας $v(t)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσεως $\sigma(t)$. Η ταχύτητα είναι σταθερή κατά μέτρο ($1 rad/\sec$).



Πρόκειται για την ομαλή κυκλική κίνηση.
Η επιτάχυνση του κινητού είναι $a(t)=\sigma''(t)=(-\cos t,-\sin t)=-(\cos t,\sin t)=-\sigma(t)$. Επομένως το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι αντίθετο του $\sigma(t)$ και κατευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου.
(Η επιτάχυνση $a(t)$ πολλαπλασιασμένη με την μάζα του κινητού μας δίνει την λεγόμενη κεντρομόλο δύναμη η οποία επιταχύνει το κινητό).

Μήκος καμπύλης Έστω $\sigma:[a,b]\to R^n$ μια καμπύλη (δηλαδή μια συνεχής συνάρτηση από το $[a,b]$ στον R^n). Για κάθε διαμέριση $\mathrm{P}=\{t_0=a<...<t_n=b\}$ του $[a,b]$ θέτομε $L(\sigma,\mathrm{P})=\sum_{k=1}^{n}\left\|\sigma(t_k)-\sigma(t_{k-1})\right\|$. Αν υπάρχει $\mathrm{M}>0: L(\sigma,\mathrm{P})\leq \mathrm{M}$ για κάθε P διαμέριση του $[a,b]$ τότε λέμε ότι η καμπύλη έχει μήκος και ως μήκος της ορίζουμε τον αριθμό,

$$\ell(\sigma)=\sup\{L(\sigma,\mathrm{P}):\mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}\leq \mathrm{M}.$$



Δηλαδή ως μήκος της $\ell(\sigma)$ ορίζεται το supremum των μηκών όλων των εγγεγραμμένων πολυγωνικών γραμμών στην καμπύλη σ.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία.

9.3 Θεώρημα. Έστω $\sigma:[a,b]\to R^n$ C^1 καμπύλη. Τότε η σ έχει μήκος και

$$\ell(\sigma)=\int_a^b\left\|\sigma'(t)\right\|dt \quad (=\int_a^b s(t)\,dt)$$

Παρατηρήσεις 1) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^m$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Τότε βέβαια η σ έχει μήκος και αν $\mathrm{P}=\{t_0=a<...<t_n=b\}:\sigma\|[t_{k-1},t_k]$ είναι C^1 για $k=1,2,...,n$ τότε

$\ell(\sigma)=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\sigma'(t)\right\|dt$. Μπορούμε βέβαια πάλι να γράφουμε, $\ell(\sigma)=\int_a^b\left\|\sigma'(t)\right\|dt$, αφού η $[a,b]\ni t\to\left\|\sigma'(t)\right\|\in R$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών.

2)Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\ell(\sigma)=\int_a^b\left\|\sigma'(t)\right\|dt$ που μας υπολογίζει το μήκος μιας C^1 καμπύλης $\sigma:[a,b]\to R^3$ είναι εκ πρώτης όψεως μη αναμενόμενος. Όμως αν σκεφθούμε το $\sigma(t)$ ως το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου με ταχύτητα , της οποίας το μέτρο ισούται με $\left\|\sigma'(t)\right\|$, που κινείται από το $\sigma(a)$ στο $\sigma(b)$, τότε το μήκος

$\ell(\sigma)$ της σ δεν είναι παρά η συνολική απόσταση που διανύθηκε. Επομένως αυτό το μήκος θα πρέπει να ισούται με το ολοκλήρωμα, $\int_a^b \|\sigma'(t)\|dt$. Αυτό γίνεται ακόμη πιο ξεκάθαρο αν σκεφθούμε πως υπολογίζουμε την διανυόμενη απόσταση στις απλές κινήσεις, όπως είναι η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (σταθερή ταχύτητα $\upsilon = ct$) και ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (σταθερή επιτάχυνση $\alpha = ct$).

3) Είναι απλό να εξακριβώσουμε ότι μια C^1 καμπύλη $\sigma:[a,b]\to R^n$ έχει μήκος και μάλιστα, $\ell(\sigma)\le\int_a^b\|\sigma'(t)\|dt$.

Πράγματι, έστω $\mathrm{P}=\{t_0=a<...<t_m=b\}$, τυχούσα διαμέριση του $[a,b]$. Τότε ισχύει η , $L(\sigma,\mathrm{P})=\sum_{k=1}^m\|\sigma(t_k)-\sigma(t_{k-1})\|\le\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|\sigma'(t)\|dt=\int_a^b\|\sigma'(t)\|dt$ (1). Επομένως, $\ell(\sigma)=\sup\{L(\sigma,\mathrm{P}):\ \mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}\le\int_a^b\|\sigma'(t)\|dt=\ell(\sigma)$.

Η απόδειξη της ανισότητας $\left\|\int_a^b\varphi(t)\,dt\right\|\le\int_a^b\|\varphi(t)\|dt$ (την οποία χρησιμοποιήσαμε) περιγράφεται στις ασκήσεις.

Παραδείγματα 1)Έστω $\sigma(t)=a+r(\cos t,\sin t)$ κύκλος κέντρου $a=(a_1,a_2)$ και ακτίνας r στο επίπεδο. Τότε $\sigma'(t)=r(-\sin t,\cos t), t\in[0,2\pi]$, $\|\sigma'(t)\|=r\sqrt{(-snt)^2+(\cos t)^2}=r$. Συνεπώς, $\ell(\sigma)=\int_0^{2\pi}\|\sigma'(t)\|dt=2\pi r$.

2)Έστω z_0,z_1,z_2 τρία διαφορετικά σημεία του R^3, θεωρούμε την πολυγωνική γραμμή, $\sigma=[z_0,z_1]\cup[z_1,z_2]$(δηλαδή $\sigma(t)=\begin{cases}(1-t)z_0+tz_1, & t\in[0,1]\\ (2-t)z_1+(t-1)z_2, & t\in[1,2]\end{cases}$)

Τότε $\ell(\sigma)=\int_0^1\|\sigma'(t)\|dt+\int_1^2\|\sigma'(t)\|dt$.

Επειδή $\sigma'(t)=z_1-z_0$ για $t\in[0,1]$ και $\sigma'(t)=z_2-z_1$ για $t\in[1,2]$ υπολογίζουμε, $\ell(\sigma)=\int_0^1\|z_1-z_0\|dt+\int_1^2\|z_2-z_1\|dt=\|z_1-z_0\|+\|z_2-z_1\|$.