8. Πολλαπλές μερικές παράγωγοι

Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}$, αν υπάρχουν, μιας συνάρτησης $f:U\subseteq R^n\to R$ (U ανοικτό) είναι και αυτές συναρτήσεις από το U στο R, επομένως μπορεί να ορισθεί και για αυτές η έννοια της μερικής παραγώγου. Αυτές ονομάζονται μερικές παράγωγοι <u>δεύτερης τάξης</u> της f.

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε είναι ο ακόλουθος:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right), 1\le k,l\le n$$

Φυσικά με ανάλογο τρόπο (και χρησιμοποιώντας επαγωγή) μπορούμε να ορίσουμε παραγώγους <u>κάθε</u> τάξης.

Έτσι για παράδειγμα, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2\partial x_5\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_5\partial x_1}\right)$ εδώ πρόκειται βέβαια για μερικές παραγώγους <u>τρίτης</u> τάξης.

Έστω για απλότητα ότι $n=2$, δηλαδή έχουμε μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, $z=f(x,y)$. Οι μερικές παράγωγοι της f εξελίσσονται σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα, που παραπέμπει στο <u>δυαδικό δέντρο</u>.

$$f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Σημειώνουμε ότι, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ κτλ.

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f:U\subseteq R^n\to R$ λέγεται ότι είναι της κλάσης C^1, αν όλες οι μερικές παράγωγοί της υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν αυτές με την σειρά τους είναι επίσης C^1 συναρτήσεις, τότε λέμε ότι η f είναι της <u>κλάσης C^2</u>. Δηλαδή η f είναι της <u>κλάση C^2</u> ακριβώς τότε αν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}, 1\le k,l\le n$ υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο U.

Με επαγωγή μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις της <u>κλάσης C^n</u> όπου $n\in N$.

Η f λέγεται της <u>κλάσης</u> C^∞ αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης και για κάθε μεταβλητή.

Για παράδειγμα αν η f είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών η f είναι της κλάσης C^2, αν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι της κλάσης C^1, δηλαδή αν οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ υπάρχουν και επί πλέον είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Παραδείγματα. 1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $\mathrm{P}(x_1,...,x_n)$ είναι της κλάσης C^∞. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_k}, k=1,2,...,n$ είναι και αυτές πολυώνυμα, επομένως συνεχείς συναρτήσεις. Επαγωγικά έχουμε ότι οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης του P είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις και άρα συνεχείς συναρτήσεις. Έπεται προφανώς ότι το P είναι συνάρτηση της κλάσης C^∞

2) Κάθε ρητή συνάρτηση $f=\frac{\mathrm{P}}{Q}$, (όπου P και Q πολυώνυμα $n-$ μεταβλητών με $Q\neq 0$) είναι της κλάσης C^∞ στο πεδίο ορισμού της. Αυτό αποδεικνύεται όπως και για τα πολυώνυμα, αφού οι $\frac{\partial f}{\partial x_k}, k=1,2,...,n$ για την ρητή f είναι πάλι ρητές συναρτήσεις και άρα συνεχείς.

3)Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:
(α) $f(x,y)=x^k\cdot y^\lambda$ όπου $k,\lambda\in N$ και (β) $f(x,y,z)=x^3y+\sin z$

Για το (α) παρατηρούμε ότι: $\frac{\partial f}{\partial x}=kx^{k-1}\cdot y^\lambda, \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda y^{\lambda-1}\cdot x^k, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=k(k-1)x^{k-2}\cdot y^\lambda$ αν $k\geq 2$ και 0 αν $k=1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=k\lambda x^{k-1}\cdot y^{\lambda-1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=k\lambda x^{k-1}\cdot y^{\lambda-1}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\lambda(\lambda-1)y^{\lambda-2}\cdot x^k$, αν $\lambda\geq 2$ και 0 αν $\lambda=1$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$. Επίσης αν $k=1$ (αντίστοιχα $\lambda=1$) τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$ (αντίστοιχα $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$).

(β) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y, \frac{\partial f}{\partial y}=x^3, \frac{\partial f}{\partial z}=\cos z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=3x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0$ (οι μερικές παράγωγοι της $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y$)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=0$ (οι μερικές παράγωγοι της $\frac{\partial f}{\partial y}=x^3$)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\sin z$ (οι μερικές παράγωγοι της $\frac{\partial f}{\partial z}=\cos z$)

Παρατηρούμε ότι: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=3x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι τα ζεύγη των μεικτών μερικών παραγώγων, όπως $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ή $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}$ είναι ίσα. Το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει πότε ισχύει αυτό γενικότερα.
Για απλότητα διατυπώνουμε το αποτέλεσμα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. (Το ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει με την ίδια ουσιαστικά απόδειξη και για συναρτήσεις

$n-$ μεταβλητών όπου $n \in N$.) Το βασικό επιχείρημα για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος είναι ένα επιχείρημα μέσης τιμής για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

8.1 Θεώρημα. Έστω $U \subseteq R^2$ ανοικτό και $f : U \subseteq R^2 \to R$ της κλάσης C^2. Τότε οι <u>μεικτές</u> μερικές παράγωγοι της f είναι ίσες, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Απόδειξη: Έστω $a = (x_0, y_0) \in U$. Θεωρούμε την ακόλουθη παράσταση: $S(h_1, h_2) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0 + h_2) + f(x_0, y_0)$ όπου τα $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0$ αρκετά μικρά ώστε να έχει νόημα η παράσταση.

Κρατώντας το h_2 σταθερό, θέτουμε $g(x) = f(x, y_0 + h_2) - f(x, y_0)$.

Έπεται ότι, $S(h_1, h_2) = g(x_0 + h_1) - g(x_0)$, δηλαδή η S εκφράζεται ως μια διαφορά διαφορών. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση g, υπάρχει $\overline{x} = x(h_1)$ μεταξύ των x_0 και $x_0 + h_1$ ώστε, $S(h_1, h_2) = g(x_0 + h_1) - g(x_0) = g'(\overline{x}) \cdot h_1$, άρα $S(h_1, h_2) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0) \right] \cdot h_1$.

Εφαρμόζοντας άλλη μια φορά το θεώρημα μέσης τιμής, αυτή την φορά στην συνάρτηση, $h(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y)$(η οποία είναι C^1) βρίσκουμε $\overline{y} = y(h_2)$ μεταξύ y_0 και $y_0 + h_2$ ώστε, $h(y_0 + h_2) - h(y_0) = h'(\overline{y}) \cdot h_2$.

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση καταλήγουμε στην, $S(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot h_1 \cdot h_2$.

Παρατηρούμε ότι αν $(h_1, h_2) \to (0,0)$ τότε $(\overline{x}, \overline{y}) = (x(h_1), y(h_2)) \to (x_0, y_0)$. Έπεται από την τελευταία σχέση και την <u>συνέχεια</u> της $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ στο (x_0, y_0), ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{S(h_1, h_2)}{h_1 \cdot h_2} \qquad (1).$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία κρατώντας αυτή την φορά το h_1 <u>σταθερό</u>.

(Αυτή την φορά θέτομε $g(y) = f(x_0 + h_1, y) - f(x_0, y)$)

Έτσι καταλήγουμε στην σχέση $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{S(h_1, h_2)}{h_1 \cdot h_2}$ (2)

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ στο U.

Σημείωση. Το γεγονός ότι η παράσταση $S(h_1,h_2)$ γράφεται ως μια διαφορά διαφορών με δυο τρόπους (οριζόντια και κατακόρυφα, ένα σχήμα θα βοηθούσε) είναι αυτό που επιτρέπει να αποδείξουμε την ισότητα των μεικτών παραγώγων.

Οι μεικτές παράγωγοι μιας συνάρτησης $y=f(x_1,...,x_n)$ δεν είναι πάντοτε ίσες. Δηλαδή η εναλλαγή του ρόλου των μεταβλητών κατά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων ανώτερης τάξης <u>δεν</u> οδηγεί πάντοτε στην ίδια παράγωγο.

Παράδειγμα. Έστω $g:R^2\to R$ φραγμένη συνάρτηση για την οποία τα όρια $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right)$ και $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right)$ υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα. Θέτομε $f(x,y)=xy\cdot g(x,y),(x,y)\in R^2$.

Παρατηρούμε ότι, αν $y\in R$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0} y\cdot g(x,y)=y\cdot\lim_{x\to 0} g(x,y)$

Ιδιαίτερα έχουμε ότι, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

Έπεται ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right)$.

Αναλόγως, υπολογίζουμε ότι: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right)$ (και $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$).

Από την υπόθεσή μας συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Δηλαδή οι μεικτές παράγωγοι δεν είναι ίσες. Παρατηρούμε ότι, το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ δεν υπάρχει και ότι η συνάρτηση $f(x,y)=xy\cdot g(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ (γιατί;).

Μια συνάρτηση με τις ιδιότητες της g είναι η ακόλουθη, $g(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $g(0,0)=0$. Η g είναι προφανώς φραγμένη, αφού $|g(x,y)|\leq 1$ για κάθε $(x,y)\in R^2$.

Παρατηρούμε ότι, $\lim_{x\to 0} g(x,y)=-1$ για κάθε $y\in R$ με $y\neq 0$ και $\lim_{y\to 0} g(x,y)=1$ για κάθε $x\in R$ με $x\neq 0$. Επομένως $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right)=-1\neq 1=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right)$.

Παρατηρήσεις. 1)Μερικές φορές χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό f_x, f_y, f_z για τις μερικές παραγώγους: $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}$, $f_z=\frac{\partial f}{\partial z}$ κτλ.

Με τον συμβολισμό αυτό έχουμε, $f_{xy}=\left(f_x\right)_y=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ και $f_{yx}=\left(f_y\right)_x=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (παρατηρούμε ότι η διάταξη των x και y αντιστρέφεται).

Με τον ίδιο συμβολισμό η ισότητα των μεικτών παραγώγων, αν υφίσταται, γράφεται :

$$f_{xy}=f_{yx}.$$

2)Έστω $f:U\subseteq R^n \to R$, U ανοικτό στον R^n. Αν η f είναι της κλάσης C^k για κάποιο $k\geq 2$. Τότε για κάθε επιλογή $\{i_1,...,i_k\}\subseteq\{1,2,...,n\}$ ισχύει ότι, $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}=\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}...\partial x_{j_k}}$ όπου, $\{j_1,...,j_k\}$ είναι μια οποιαδήποτε μετάθεση των συμβόλων $\{i_1,...,i_k\}$. Με άλλα λόγια μπορούμε να υπολογίζουμε μερικές παραγώγους της f μέχρι k τάξης με οποιαδήποτε σειρά αφού καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Για παράδειγμα, αν $\kappa=3$ και $n=2$ τότε, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial x}$

Σημειώνουμε ότι αν η f είναι συνάρτηση $n-$ μεταβλητών τότε τυπικά ορίζονται n^k μερικές παράγωγοι της f τάξης k (κάποιες βέβαια από αυτές είναι μεταξύ τους ίσες). Για παράδειγμα αν f είναι της κλάσης C^2 υπάρχουν ουσιαστικά $\frac{n(n+1)}{2}$ το πλήθος μερικές παράγωγοι της f δεύτερης τάξης, οι εξής: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, i=1,...,n$ και οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}, 1\leq i<j\leq n$.

3)Αν $f,g:U\subseteq R^n\to R$ (U ανοικτό στο R^n) είναι της κλάσης C^λ ($\lambda\geq 0$) τότε οι συναρτήσεις $f+g,\lambda f$, όπου $\lambda\in R$, $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$ αν $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in U$, είναι της κλάσης C^λ

(Πράγματι, $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial g}{\partial x_i}, \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}=\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}$ και $\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g+\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot f, 1\leq i\leq n$, έτσι το αποτέλεσμα έπεται από τους παραπάνω τύπους με επαγωγή στο λ).

Μια διανυσματική συνάρτηση $f:U\subseteq R^n\to R^m$, με $f=(f_1,...,f_m)$ λέγεται ότι είναι της <u>κλάσης</u> C^λ ($\lambda\geq 0$) αν οι συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1,...,f_m$ της f είναι όλες της κλάσης C^λ.

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

(*) 8.2 Πρόταση: Έστω $U \subseteq R^n$ και $V \subseteq R^m$ ανοικτά και $g: U \subseteq R^n \to R^m$, $f: V \subseteq R^m \to R^p$ συναρτήσεις της κλάσης C^λ ($\lambda \geq 0$) με $g(U) \subseteq V$. Τότε η $h = fog$ είναι της κλάσης C^λ.

Απόδειξη: Για $\lambda = 0$ το αποτέλεσμα αυτό είναι βέβαια γνωστό (σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση).
Έστω $\lambda \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η f είναι <u>πραγματική</u> συνάρτηση δηλαδή $p = 1$ και αυτό δεν περιορίζει την γενικότητα αφού μια διανυσματική συνάρτηση είναι της κλάσης $C^\lambda \Leftrightarrow$ οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι C^λ.
Αν $\lambda = 1$. Από τον <u>κανόνα της αλυσίδας</u> έχουμε ότι αν $h = fog$, $g = (y_1, ..., y_m)$ και $x \in U$ τότε: $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial y_k}(g(x)) \cdot \dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}(x), 1 \leq i \leq n, x \in U$.
Επειδή οι συναρτήσεις $\dfrac{\partial f}{\partial y_k} og, \dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$ είναι συνεχείς για κάθε $k = 1, ..., m$ για κάθε $i = 1, ..., n$ έπεται ότι η συνάρτηση $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}$ είναι συνεχής στο U για κάθε $i = 1, ..., n$. Έτσι η h είναι C^1.
Αν $\lambda = 2$. Θέτουμε $\dfrac{\partial f}{\partial y_k} = f_k, 1 \leq k \leq m$ και $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i} = \varphi_i^k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$ τότε $\dfrac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} (f_k og) \cdot \varphi_i^k, 1 \leq i \leq n$. Από τον κανόνα αλυσίδας και τους κανόνες παραγώγισης (δες παρατήρηση (2)) συμπεραίνουμε ότι η $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}$ είναι συνεχής στο U για κάθε $i = 1, ..., n$, έτσι η h είναι της κλάσης C^2.
Πρέπει τώρα να είναι σαφές ότι το γενικό αποτέλεσμα έπεται με επαγωγή στο λ.

Σημείωση. Παρατηρούμε ότι η πρόταση 8.2 όπως και η παρατήρηση 3 ισχύουν και για συναρτήσεις της κλάσης C^∞

Εφαρμογές.(*) 1) Έστω $f(x, y) = e^x \sin xy$ και $x = g(s,t), y = h(s,t)$ για κάποιες C^2 συναρτήσεις $g, h: R^2 \to R$. Θέτουμε, $\kappa(s,t) = f(g(s,t), h(s,t)), (s,t) \in R^2$.

Υπολογίστε την $\kappa_{st} = \dfrac{\partial^2 \kappa}{\partial t \partial s}$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας. [Η κ_{st} θα υπολογιστεί συναρτήσει των μερικών παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης των g, h].

Λύση $\underbrace{(s,t) \in R^2 \xrightarrow{G} (g(s,t), h(s,t)) \in R^2 \xrightarrow{f} R}_{foG = \kappa}$

$\kappa(s,t) = (foG)(s,t) = f(G(s,t)) = f(g(s,t), h(s,t))$, $(s,t) \in R^2$.

Από τον κανόνα αλυσίδας για την foG παίρνουμε $\kappa_s = \dfrac{\partial \kappa}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial h}{\partial s} = f_x \cdot g_s + f_y \cdot h_s =$

$\left(e^x \sin xy + ye^x \cos xy\right) g_s + \left(xe^x \cos xy\right) h_s$ (1)

Παραγωγίζοντας ως προς t την κ_s παίρνουμε: $\kappa_{st} = \underbrace{\left[\left(f_x\right)_t \cdot g_s + f_x \cdot \left(g_s\right)_t\right]}_{\left(f_x \cdot g_s\right)_t} + \underbrace{\left[\left(f_y\right)_t \cdot h_s + f_y \cdot \left(h_s\right)_t\right]}_{\left(f_y \cdot h_s\right)_t} =$

$\left(f_x\right)_t \cdot g_s + f_x \cdot \left(g_s\right)_t + \left(f_y\right)_t \cdot h_s + f_y \cdot \left(h_s\right)_t$ (2)

Εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα της αλυσίδας στις $\left(f_x\right)_t$ και $\left(f_y\right)_t$ οπότε $\left((s,t) \to f_x\left(g(s,t),h(s,t)\right)\right.$ και $\left.(s,t) \to f_y\left(g(s,t),h(s,t)\right)\right)$, $\left(f_x\right)_t = f_{xx} \cdot g_t + f_{xy} \cdot h_t$ και $\left(f_y\right)_t = f_{yx} \cdot g_t + f_{yy} \cdot h_t$.

Οπότε αντικαθιστώντας στην (2) η κ_{st} γίνεται:

$\kappa_{st} = \left(f_{xx} \cdot g_t + f_{xy} \cdot h_t\right) g_s + f_x \cdot g_{st} + \left(f_{yx} \cdot g_t + f_{yy} \cdot h_t\right) h_s + f_y \cdot h_{st}$

$= f_{xx} \cdot g_t \cdot g_s + f_{xy}\left(h_t g_s + g_t h_s\right) + f_{yy} \cdot h_t h_s + f_x \cdot g_{st} + f_y \cdot h_{st}$.

Παρατηρούμε ότι αυτός ο τελευταίος τύπος είναι συμμετρικός ως προς (s,t), επαληθεύοντας έτσι την ισότητα $\kappa_{st} = \kappa_{ts}$ (υπόθεση ότι g,h είναι C^2, f είναι βέβαια C^∞).

Υπολογίζοντας τις f_{xx}, f_{xy} και f_{yy} βρίσκουμε $\kappa_{st} = \left(e^x \sin xy + 2ye^x \cos xy - y^2 e^x \sin xy\right) g_s g_t +$

$\left(xe^x \cos xy + e^y \cos xy - xye^x \sin xy\right)\left(h_t h_s + h_s g_t\right) - \left(x^2 e^x \sin xy\right) h_t h_s +$

$\left(e^x \sin xy + ye^x \cos xy\right) g_{st} + \left(xe^x \cos xy\right) h_{st}$.

Όπου βέβαια <u>εννοείται</u> ότι $x = g(s,t)$ και $y = h(s,t)$.

Σημείωση

$f_{xx}(x,y) = e^x \sin xy + 2ye^x \cos xy - y^2 e^x \sin xy$

$f_{xy}(x,y) = xe^x \cos xy + e^x \cos xy - xye^x \sin xy$

$f_{yy}(x,y) = -x^2 e^x \sin xy$

$f_x(x,y) = e^x \sin xy + ye^x \cos xy$

$f_y(x,y) = xe^x \cos xy$

2) Έστω $f : R^2 \to R$ C^2 συνάρτηση. Θέτομε $\varphi(t) = f(a+\lambda t, b+\mu t)$ για $t \in R$, όπου $a,b,\lambda,\mu \in R$. Τότε $\varphi''(0) = \lambda^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2\lambda\mu \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + \mu^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$.

Λύση $\underbrace{t \in R \xrightarrow{\sigma} (a+\lambda t, b+\mu t) \in R^2 \xrightarrow{f} R}_{\varphi = fo\sigma}$

$\varphi(t) = f(\sigma(t)) = f(a+\lambda t, b+\mu t), t \in R$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι για $t_0 \in R$ ισχύει $\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0)) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0) =$
$= \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0)) + \mu \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0))$, για απλότητα γράφουμε $\frac{d\varphi}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f_x + \mu f_y$. Συνεπώς $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda \frac{d(f_x)}{dt} + \mu \frac{d(f_y)}{dt}$ (1)

(όπου με $\frac{d(f_x)}{dt}$ εννοούμε την παράγωγο της $f_x(a+\lambda t, b+\mu t), t \in R$).

Από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(f_x)}{dt} &= \frac{\partial f_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \mu \\ \frac{d(f_y)}{dt} &= \frac{\partial f_y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \mu \end{aligned}\right\} (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στην (1) παίρνουμε,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \mu \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \mu \right] = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Άρα $\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t_0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sigma(t_0)) + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sigma(t_0)) + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sigma(t_0))$

Για $t_0 = 0$ η τελευταία σχέση δίνει

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(0) = \varphi''(0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$