Κανόνας της αλυσίδας

Από τον Απειροστικό Λογισμό για συναρτήσεις μιας μεταβλητής γνωρίζουμε ότι: Αν $g: I \subseteq R \to R$ και $f: J \subseteq R \to R$ είναι συναρτήσεις (όπου I, J ανοικτά διαστήματα) ώστε $g(I) \subseteq J, a \in I$, g διαφορίσιμη στο a και f διαφορίσιμη στο $g(a)$ τότε η $fog: I \to R$ είναι διαφορίσιμη στο a και ισχύει ο κανόνας αλυσίδας,

$$(fog)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \quad (1)$$

Αν οι f και g είναι διαφορίσιμες στα πεδία ορισμού τους τότε γράφουμε,

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x), x \in I \quad (2)$$

Θέτοντας $y = g(x)$ και $z = f(g(x))$ μπορούμε να γράψουμε τον τύπο (2) ως εξής:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{) } (3)$$

Έστω ότι δίνεται μια πραγματική συνάρτηση τριών μεταβλητών x, y και z, που γράφεται ως $\omega = f(x, y, z)$ και κάθε μια από τις x, y και z είναι συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής t, $x = x(t), y = y(t)$ και $z = z(t)$, τότε μπορούμε να εκφράσουμε το ω ως συνάρτηση του t ως εξής: $\omega = f(x(t), y(t), z(t))$. Στην περίπτωση αυτή ο κανόνας της αλυσίδας γίνεται (με τις κατάλληλες υποθέσεις διαφορισιμότητας για τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις).

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Ο σκοπός μας είναι να εξηγήσουμε τέτοιους τύπους λεπτομερώς.
Καθόσον αφορά διανυσματικές συναρτήσεις παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ισοδύναμες διατυπώσεις του κανόνας της αλυσίδας. Η μία διατύπωση αφορά σύνθεση συναρτήσεων (των διαφορικών των εμπλεκομένων συναρτήσεων) και η άλλη γινόμενο πινάκων. Εφόσον στην έννοια του διαφορικού που είναι μια γραμμική συνάρτηση $T: R^n \to R^m$ αντιστοιχεί ένας $m \times n$ πίνακας $A = (T_j(e_i)), 1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, όπου $T = (T_1, ..., T_m)$.

Υπενθυμίζουμε πριν διατυπώσουμε το γενικό θεώρημα, τα ακόλουθα.

1)Αν $T_1: R^n \to R^m$ και $T_2: R^m \to R^p$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, $T = T_2 o T_1$ η σύνθεσή τους και A, B,, C οι πίνακες που αντιστοιχούν στις T_1, T_2 και T τότε, $C = B \cdot A$ (γινόμενο πινάκων).

2)Αν $f: U \subseteq R^n \to R$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $a \in U$ το διάνυσμα $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ ονομάζεται <u>κλίση</u> της f στο a. (Δηλαδή στην περίπτωση πραγματικής συνάρτησης ονομάζουμε τον πίνακα Jacobi της f κλίση της f).

3)Αν $g: I \subseteq R \to R^n$, όπου $I \subseteq R$ ανοικτό διάστημα, είναι διαφορίσιμη στο $a \in I$ τότε, αν $h \in R$ και $g = (g_1, ..., g_n)$, ισχύει

$Dg(a)(h) = (Dg_1(a)\cdot h,...,Dg_n(a)\cdot h) = (g_1^{'}(a)\cdot h,...,g_n^{'}(a)\cdot h) =$
$h\cdot(g_1^{'}(a),...,g_n^{'}(a))$

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας Jacobi της g στο a είναι το διάνυσμα στήλη,

$$\begin{pmatrix} g_1^{'}(a) \\ . \\ . \\ g_n^{'}(a) \end{pmatrix}.$$

Γράφουμε τότε, $g'(a) = (g_1^{'}(a),...,g_n^{'}(a))$, (Πρβλ. , Ορισμό 5.4 , Παρατ. 5 .)

6.1 Θεώρημα (κανόνας της αλυσίδας). Έστω $U \subseteq R^n$ και $V \subseteq R^m$ ανοικτά σύνολα. Έστω ακόμη $g: U \subseteq R^n \to R^m$ και $f: V \subseteq R^m \to R^p$ συναρτήσεις ώστε $g(U) \subseteq V$ και $a \in U$ ώστε η g διαφορίσιμη στο a και η f διαφορίσιμη στο $g(a)$. Τότε η fog είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D(fog)(a) = Df(g(a))oDg(a) \text{ (σύνθεση συναρτήσεων)}$$

Ισοδύναμα για τους πίνακες Jacobi έχουμε:

$$J_{(fog)(a)} = J_{f(g(a))} \cdot J_{g(a)} \text{ (πολλαπλασιασμός πινάκων).}$$

Ο πρώτος πίνακας είναι $p \times n$ ο δεύτερος $p \times m$ πίνακας και ο τρίτος $m \times n$ πίνακας

Απόδειξη: Θα δώσουμε προς το παρόν μια απόδειξη αυτού του σημαντικού αποτελέσματος με την επιπλέον υπόθεση ότι οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν σε μια περιοχή του $g(a)$ και είναι συνεχείς στο $g(a)$.

Η ακόλουθη ειδική περίπτωση του θεωρήματος μας δίνει εύκολα και το γενικό αποτέλεσμα:

(I) Έστω $n = 1, m = 3$ και $p = 1$, δηλαδή $g: U \subseteq R \to R^3$ και $f: V \subseteq R^3 \to R$.
(Όπου το U θεωρείται τώρα ανοικτό διάστημα του R).
Έστω $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και $h = fog \Leftrightarrow h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$.

Τότε
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \quad (0)$$

Ακριβέστερα: $\frac{dh}{dt}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(a))\cdot\frac{dx}{dt}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(a))\cdot\frac{dy}{dt}(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(g(a))\cdot\frac{dz}{dt}(a)$.

(Παρατηρούμε ότι: $\frac{dh}{dt}(a) = \nabla f(g(a))\cdot g'(a)$ είναι εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων όπου, $g'(a) = (x'(a), y'(a), z'(a)) = \left(\frac{dx}{dt}(a), \frac{dy}{dt}(a), \frac{dz}{dt}(a)\right)$ ή ακόμη, $\frac{dh}{dt}(a) = J_{f(g(a))} \cdot J_{g(a)}$ γινόμενο του πίνακα γραμμή $J_{f(g(a))} = \nabla f(g(a))$ και του πίνακα στήλη $J_{g(a)} = \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \\ z'(a) \end{pmatrix}$)

Απόδειξη της (Ι) Η συνάρτηση h είναι βέβαια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής ($\underbrace{U \subseteq R \xrightarrow{g} R^3 \supseteq V \xrightarrow{f} R}_{h=fog}$ και $g(U) \subseteq V$).

Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε: $\frac{dh}{dt}(a) = \lim_{t \to a} \frac{h(t)-h(a)}{t-a}$.

Προσθέτοντας και αφαιρώντας δύο όρους γράφουμε, (για $t \neq a$ με $t \in U$)

$$\frac{h(t)-h(a)}{t-a} =$$

$$\frac{f(x(t),y(t),z(t)) - f(x(a),y(a),z(a))}{t-a} =$$

$$= \frac{f(x(t),y(t),z(t)) - f(x(a),y(t),z(t))}{t-a} +$$

$$\frac{f(x(a),y(t),z(t)) - f(x(a),y(a),z(t))}{t-a} +$$

$$\frac{f(x(a),y(a),z(t)) - f(x(a),y(a),z(a))}{t-a} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού στις συναρτήσεις: (για δεδομένο $t \in U$ με $t \neq a$)

(α) $x \to f(x, y(t), z(t))$ στο διάστημα με άκρα $x(t), x(a)$ και βρίσκουμε $c_1(t)$ ανάμεσα στα $x(t)$ και $x(a)$ ώστε

$$f(x(t),y(t),z(t)) - f(x(a),y(t),z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_1(t),y(t),z(t))(x(t)-x(a))$$

(β) $y \to f(x(a), y, z(t))$ στο διάστημα με άκρα $y(t)$ και $y(a)$ και βρίσκουμε $c_2(t)$ ανάμεσα στα $y(t)$ και $y(a)$ ώστε

$$f(x(a),y(t),z(t)) - f(x(a),y(a),z(t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x(a),c_2(t),z(t)) \cdot (y(t)-y(a))$$

(γ) $z \to f(x(a), y(a), z)$ στο διάστημα με άκρα $z(t)$ και $z(a)$ και βρίσκουμε $c_3(t)$ ανάμεσα στα $z(t)$ και $z(a)$ ώστε

$$f(x(a),y(a),z(t)) - f(x(a),y(a),z(a)) = \frac{\partial f}{\partial z}(x(a),y(a),c_3(t))(z(t)-z(a)).$$

Έτσι η (1) ξαναγράφεται ως εξής :

$$\frac{h(t)-h(a)}{t-a} = \frac{\partial f}{\partial x}(c_1(t),y(t),z(t)) \cdot \frac{x(t)-x(a)}{t-a} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x(a),c_2(t),z(t)) \cdot \frac{y(t)-y(a)}{t-a} + \frac{\partial f}{\partial z}(x(a),y(a),c_3(t)) \cdot \frac{z(t)-z(a)}{t-a} \quad (2)$$

Λαμβάνουμε τώρα το όριο της (2) καθώς το $t \to a$. Παρατηρούμε ότι τότε, $x(t) \xrightarrow[t \to a]{} x(a), y(t) \xrightarrow[t \to a]{} y(a), z(t) \xrightarrow[t \to a]{} z(a)$ (οι x, y, z είναι συνεχείς στο a αφού είναι διαφορίσιμες εκεί), συνεπώς, $c_1(t) \xrightarrow[t \to a]{} x(a)$, $c_2(t) \xrightarrow[t \to a]{} y(a)$

και $c_3(t)\xrightarrow[t\to a]{} z(a)$. Έπεται από την συνέχεια των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ στο σημείο $g(a)$ ότι ισχύει ο ζητούμενος τύπος (0).

Παρατηρούμε τώρα ότι ο τύπος (0) γενικεύεται εύκολα στην περίπτωση των m μεταβλητών, δηλαδή $n=1, m\geq 2$ και $p=1$($g:U\subseteq R\to R^m$ και $f:V\subseteq R^m\to R$).

Έστω λοιπόν $g(t)=(x_1(t),...,x_m(t))$ και f συνάρτηση των μεταβλητών $(x_1,...,x_m)\in R^m$. Τότε εντελώς ανάλογα (χρησιμοποιώντας ένα τηλεσκοπικό άθροισμα) αποδεικνύεται ότι αν $h=fog$, $h(t)=f(x_1(t),...,x_m(t))$, τότε,

(3) $\frac{dh}{dt}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}$ (οι παράγωγοι υπολογίζονται στο $a\in U$)

(II) Έστω $g:U\subseteq R^n\to R^m$ και $f:V\subseteq R^m\to R$ ($g(U)\subseteq V$) και $h=fog$. Δηλαδή η f είναι πραγματική συνάρτηση και η g διανυσματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής. Αν $g=(y_1,...,y_m)$ και $h=fog$ τότε $h(x_1,...,x_n)=f(g(x_1,...,x_n))=f(y_1(x_1,...,x_n),...,y_m(x_1,...,x_n))$.

Έστω $1\leq i\leq n$, τότε θεωρούμε την h ως συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x_i και αναγόμαστε στην περίπτωση (I). Ακριβέστερα θεωρούμε την συνάρτηση $t\to f(y_1(a_1,...,a_{i-1},t,a_{i+1},...,a_n),...,y_m(a_1,...,a_{i-1},t,a_{i+1},...,a_n))$ και από τον τύπο (3) λαμβάνουμε, $\frac{\partial h}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}, 1\leq i\leq n$ (4)

Με περισσότερη ακρίβεια ισχύει ότι: $\frac{\partial h}{\partial x_i}(a)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_k}(g(a))\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a), 1\leq i\leq n$ (5)

Ο (4) ή ο (5) προκύπτει και με πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων πινάκων Jacobi:

$$J_{h(a)}=J_{f(g(a))}\cdot J_{g(a)}, a\in R^n \text{ ή } \left(\frac{\partial h}{\partial x_1},...,\frac{\partial h}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial y_1},...,\frac{\partial f}{\partial y_m}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την περίπτωση II, ας θεωρήσουμε ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα.

Έστω $f:R^3\to R$ και $g:R^3\to R^3$ C^1 συναρτήσεις, θεωρούμε την σύνθεση $h=fog$ των f και g. Αν $g=(u,v,\omega)$ τότε , $h(x,y,z)=f(g(x,y,z))=f(u(x,y,z),v(x,y,z),\omega(x,y,z))$

Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\\ \frac{\partial h}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}\\ \frac{\partial h}{\partial z}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad (6)$$

Πράγματι, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι

$$J_{h(a)} = J_{f(g(a))} \cdot J_{g(a)}, a \in R^3$$

$$\text{ή } \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial \omega}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Με πολλαπλασιασμό των πινάκων βρίσκουμε τους τύπους (6).
Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την

Γενική περίπτωση: Έστω $g: U \subseteq R^n \to R^m$ και $f: V \subseteq R^m \to R^p$ ($g(U) \subseteq V$) και $h = fog$. Αν $g = (y_1, ..., y_m)$, $f = (f_1, ..., f_p)$ και $h = (h_1, ..., h_p)$ τότε βέβαια $h_j = f_j og \Leftrightarrow h_j(x_1, ..., x_n) = f_j(g(x_1, ..., x_n)) = f_j(y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n))$ όπου $j = 1, 2, ..., p$.

$$\underbrace{R^n \supseteq U \xrightarrow{g} V \subseteq R^m \xrightarrow{f_j} R}_{h_j = f_j og}, 1 \le j \le p.$$

Αν $1 \le j \le p$ και $1 \le i \le n$ τότε θεωρώντας την h_j ως συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x_i, δηλαδή αναγόμενοι στην περίπτωση ΙΙ, θα έχουμε από τον τύπο (4)

ότι, $\dfrac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f_j}{\partial y_k} \cdot \dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}, 1 \le j \le p, 1 \le i \le n$ (και από τον τύπο (5) ότι),

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(g(a)) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a), 1 \le j \le p, 1 \le i \le n.$$

Ο τελευταίος αυτός τύπος είναι ισοδύναμος με τον τύπο που εμφανίζεται στην διατύπωση του θεωρήματος αν εκτελέσουμε τους πολλαπλασιασμούς των πινάκων Jacobi.

Σημείωση. Καθώς η περίπτωση (I) του Θεωρ. 6.1 είναι ιδιαίτερα σημαντική είναι καλό να την απομνημονεύσουμε ως εξής: $h'(a) = \nabla f(g(a)) \cdot g'(a)$,
όπου $a \in U$, $g'(a) = (x_1'(a), ..., x_n'(a))$ και $h = f \circ g$.

Απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας χωρίς την υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων

6.2 Θεώρημα (κανόνας της αλυσίδας). Έστω $U \subseteq R^n$ και $V \subseteq R^m$ ανοικτά σύνολα. Έστω ακόμη $g: U \to V$ και $f: V \to R^p$ συναρτήσεις και $a \in U$ ώστε η g είναι διαφορίσιμη στο a και η f διαφορίσιμη στο $g(a)$. Τότε η fog είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D(fog)(a) = Df(g(a)) o Dg(a)$$

Απόδειξη Θέτουμε – για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού- $\mathrm{A} = Dg(a)$, $\mathrm{B} = Df(g(a))$ και γράφουμε $\mathrm{A}h$ αντί $\mathrm{A}(h)$ και $\mathrm{B}\kappa$ αντί $\mathrm{B}(\kappa)$, όπου $h \in R^n$ και $\kappa \in R^m$.

Από τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης έχουμε: $g(a+h) = g(a) + \mathrm{A}h + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|$ και $f(g(a)+\kappa) = f(g(a)) + \mathrm{B}\kappa + \varepsilon_2(\kappa) \cdot \|\kappa\|$, όπου $\lim\limits_{h\to 0}\left\|\varepsilon_1(h)\right\| = 0$ και $\lim\limits_{\kappa\to 0}\left\|\varepsilon_2(\kappa)\right\| = 0$ Επίσης υπενθυμίζουμε ότι, αφού οι A και B είναι γραμμικές απεικονίσεις και άρα Lipschitz, υπάρχουν σταθερές $c_1 > 0$ και $c_2 > 0$ ώστε $\left\|\mathrm{A}h\right\| \le c_1\left\|h\right\|, h \in R^n$ και $\left\|\mathrm{B}\kappa\right\| \le c_2\left\|\kappa\right\|, \kappa \in R^m$. Έπεται από τις παραπάνω ισότητες ότι, $(fog)(a+h) = f\left(g(a+h)\right) = f\left(g(a) + \underbrace{\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|}_{\kappa}\right)$, άρα, θέτοντας $\kappa = \mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|$, έχουμε

$$(fog)(a+h) = f\left(g(a)\right) + \mathrm{B}\left(\underbrace{\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|}_{\kappa}\right) +$$

$$\underbrace{\varepsilon_2\left(\underbrace{\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|}_{\kappa}\right)\cdot\left\|\underbrace{\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|}_{\kappa}\right\|}_{\eta_2(h)\cdot\left\|h\right\|} = fog(a) + \mathrm{BA}h + \eta(h)\cdot\left\|h\right\|$$

όπου, $\eta(h) = \eta_1(h) + \eta_2(h)$, $\eta_1(h) = \mathrm{B}\varepsilon_1(h)$ και $\eta_2(h)\cdot\left\|h\right\| = \varepsilon_2\left(\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\cdot\left\|\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\ \right\|$.

Αυτό που απομένει είναι να αποδείξουμε ότι $\left\|\eta_1(h)\right\|$ και $\left\|\eta_2(h)\right\|$ και συνεπώς $\left\|\eta(h)\right\| = \left\|\eta_1(h) + \eta_2(h)\right\|$ τείνουν στο 0 καθώς το $\left\|h\right\| \to 0$. (Διότι τότε το διαφορικό της fog στο a θα ισούται με ΒΑ, δηλαδή έχουμε την ζητούμενη ισότητα).

Παρατηρούμε ότι, $\left\|\eta_1(h)\right\| \le c_2\left\|\varepsilon_1(h)\right\| \to 0$ καθώς το $h \to 0$. Επίσης παρατηρούμε ότι,

$$\left\|\eta_2(h)\left\|h\right\|\ \right\| = \left\|\varepsilon_2\left(\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\right\|\cdot\left\|\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\ \right\| \le$$

$$\left\|\varepsilon_2\left(\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\right\|\cdot\left(\left\|\mathrm{A}h\right\| + \left\|\varepsilon_1(h)\right\|\cdot\left\|h\right\|\right) \le \left\|\varepsilon_2\left(\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\right\|\cdot\left(c_1 + \left\|\varepsilon_1(h)\right\|\right)\cdot\left\|h\right\|.$$

Επομένως θα έχουμε ότι $\left\|\eta_2(h)\right\| \le \left\|\varepsilon_2\left(\mathrm{A}h + \varepsilon_1(h)\cdot\left\|h\right\|\right)\right\|\cdot\left(c_1 + \left\|\varepsilon_1(h)\right\|\right) \to 0$ καθώς το $\left\|h\right\| \to 0$ και έτσι η απόδειξή μας είναι πλήρης.

Σημείωση. Ο κανόνας της αλυσίδας έχει μεγάλη (όπως γνωρίζουμε από το Λογισμό της μίας μεταβλητής πρακτική αλλά και) θεωρητική σημασία . Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια ερμηνεύει την κλίση ∇f μιας διαφορίσιμης συνάρτησης (Θεωρ. 10.2) και έχει πολλές άλλες εφαρμογές (Πρβλ. Θεώρ. μέσης τιμής 7.1 , ανάπτυγμα Taylor , Θεωρ. Πεπλεγμένης συνάρτησης κλπ. .)

Εφαρμογές και παραδείγματα πάνω στον κανόνα αλυσίδας

Έστω $f(x,y)$ διαφορίσιμη συνάρτηση των x και y, και έστω $x = x(t), y = y(t)$ διαφορίσιμες συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής t. Τότε ο κανόνας αλυσίδας μας λέει ότι η $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του t και

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

1)Έστω $z=\sqrt{x^2+2xy}$, όπου $x=\cos\theta$ και $y=\sin\theta$. Να βρεθεί η $\frac{dz}{d\theta}$ με τον κανόνα της αλυσίδας.

Λύση: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+2y\right)$ και $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x\right)$.

Επίσης $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$ και $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$. Από τον τύπο (1) έχουμε,

$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+2y\right)\left(-\sin\theta\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x\right)\left(\cos\theta\right)=\left(x^2+2xy\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x\cos\theta-x\sin\theta-y\sin\theta\right),\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

2)Ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος μεταβάλλεται σε τρόπο ώστε η ακτίνα της βάσης του r αυξάνει με ρυθμό $3cm/\min$ και το ύψος του h μειώνεται με ρυθμό $5cm/\min$. Με τι ρυθμό μεταβάλλεται ο όγκος του κυλίνδρου την χρονική στιγμή κατά την οποία $r=10cm$ και $h=8cm$;

Λύση Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V=\pi r^2 h$ και δίδεται ότι $\frac{dr}{dt}=3$ και $\frac{dh}{dt}=-5$. Έχουμε ότι $\frac{\partial V}{\partial r}=2\pi rh$ και $\frac{\partial V}{\partial h}=\pi r^2$. Από τον κανόνα αλυσίδας, (δηλαδή εφαρμόζοντας την (1)) υπολογίζουμε $\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}=2\pi rh(3)+\pi r^2(-5)$. Επομένως, την χρονική στιγμή κατά την οποία $r=10cm$ και $h=8cm$ έχουμε $\frac{dV}{dt}=2\pi(10)(8)(3)+\pi\left(10\right)^2(-5)=-20\pi$ ίσο περίπου $-62,8\frac{cm^3}{\min}$

Επομένως ο όγκος μειώνεται με ρυθμό περίπου $62,8\frac{cm^3}{\min}$

3) Έστω $y:I\subseteq R\to R$ διαφορίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής x (I ανοικτό διάστημα του R). Υποθέτουμε ότι, $\sin\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)=y$.

Να υπολογιστεί η $\frac{dy}{dx}$.

Λύση Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $\sin\left(x+y\left(x\right)\right)+\cos\left(x-y\left(x\right)\right)=y\left(x\right), x\in I$.

Θέτουμε $F\left(x,y\right)=\sin\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)-y$, επομένως $F\left(x,y\left(x\right)\right)=0$ για κάθε $x\in I$. Έπεται ότι $\frac{\partial F}{\partial x}=\cos\left(x+y\right)-\sin\left(x-y\right)$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\cos\left(x+y\right)-\sin\left(x-y\right)\left(-1\right)-1=\cos\left(x+y\right)+\sin\left(x-y\right)-1$$

Από τον κανόνα αλυσίδας (τύπος (1)) υπολογίζουμε,

$$0=\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot(1)+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{-\left[\cos(x+y)-\sin(x-y)\right]}{\cos(x+y)+\sin(x-y)-1}$$

(υποθέτοντας ότι $\cos(x+y)+\sin(x-y)-1\neq 0$).

Από τον κανόνα αλυσίδας έπεται ότι: Αν $z=f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $V\subseteq R^2$ και $x=x(u,v), y=y(u,v)$ διαφορίσιμες συναρτήσεις των μεταβλητών $(u,v)\in U$ (U ανοικτό στο R^2) ώστε $(x(u,v),y(u,v))\in V$ για κάθε $(u,v)\in U$, τότε η σύνθετη συνάρτηση, $z=f(x(u,v),y(u,v))$ είναι διαφορίσιμη στο U και

, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$. (2)

4)Έστω $z=4x-y^2$, όπου $x=uv^2$ και $y=u^3v$. Να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ με χρήση του κανόνα αλυσίδας.

Λύση Υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y, \dfrac{\partial x}{\partial u}=v^2, \dfrac{\partial y}{\partial u}=3u^2v$ και $\dfrac{\partial x}{\partial v}=2uv, \dfrac{\partial y}{\partial v}=u^3$

Επομένως, από τους τύπους (2) έχουμε: $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}=4v^2+(-2y)(3u^2v)$

$=4v^2-6u^5v^2$ και

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=4(2uv)+(-2y)(u^3)=8uv-2u^6v$$

Φυσικά οι $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ μπορούν να υπολογιστούν ευκολότερα αν εκφράσουμε την $z=4x-y^2$ ως συνάρτηση των u και v αντικαθιστώντας τα x και y με τις ποσότητες uv^2 και u^3v αντίστοιχα..

5)Έστω $g(x,y)=\left(x^2+1,y^2\right)$ και $f(u,v)=\left(u+v,u,v^2\right)$.

Να υπολογιστεί ο πίνακας Jacobi, $J_{fog}(1,1)$.

Λύση Είναι βέβαια σαφές ότι οι f και g είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο R^2. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε ότι ($\underbrace{R^2\xrightarrow{g}R^2\xrightarrow{f}R^3}_{fog}$)

$$J_{fog}(a)=J_{f(g(a))}\cdot J_{g(a)},\quad a\in R^2$$

Υπολογίζουμε, $J_{f(u,v)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&2v\end{pmatrix}, J_{g(x,y)}=\begin{pmatrix}2x&0\\0&2y\end{pmatrix}$

Έτσι, για $a=(1,1), g(1,1)=(2,1)$, συνεπώς

$$J_{fog(1,1)}=J_{f(2,1)}\cdot J_{g(1,1)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&0\\0&4\end{pmatrix}$$

6)Έστω $f:R^2\to R^2$, C^1 συνάρτηση. Κάνουμε την αντικατάσταση $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ (πολικές συντεταγμένες). Να υπολογισθεί η $\frac{\partial f}{\partial\theta}$.

Λύση Έστω $g:(0,+\infty)\times[0,2\pi)\to R^2 : g(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ όπου, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ και $\theta\in[0,2\pi)$ ώστε $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$. Θέτουμε $h=fog$, συνεπώς $h(r,\theta)=f(g(r,\theta))=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ για $(r,\theta)\in(0,+\infty)\times[0,2\pi)$.
Η συνάρτηση h είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$. Ουσιαστικά πρέπει να υπολογίσουμε την $\frac{\partial h}{\partial\theta}$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{\partial h}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ασκήσεις

1)Μία συνάρτηση $f:R^n\to R$ ονομάζεται <u>ομογενής</u> βαθμού $m\in N$, αν $f(tx)=t^m\cdot f(x)$ για κάθε $x\in R^n$ και για κάθε $t\in R$. Αν η f είναι ομογενής βαθμού m και διαφορίσιμη τότε ισχύει ότι, $x\cdot\nabla f(x)=m\cdot f(x)$ για κάθε $x\in R^n$.
[Αυτό είναι το θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις. Για την απόδειξη σταθεροποιείστε ένα $x\in R^n$ και θέσατε $g(t)=f(tx)$ και υπολογίστε την $g'(1)$].
Προσπαθήστε να σκεφθείτε για το αντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος.

2)Έστω $f,g:R\to R$ συναρτήσεις της κλάσης C^2. Θέτουμε $F(x,y)=f(x+g(y))$ για κάθε $(x,y)\in R^2$. Βρείτε τύπους για τις μερικές παραγώγους της F πρώτης και δεύτερης τάξης συναρτήσει των παραγώγων των f και g. Επίσης αποδείξτε ότι:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x^2}$$

(Συμβουλευθείτε και την παράγραφο για τις παραγώγους ανώτερης τάξης.)

3)Έστω $f:R\to R$ διαφορίσιμη και $g:R^3\to R : g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.
Αν $h=fog$, δείξτε ότι $\|\nabla h(x,y,z)\|^2=4g(x,y,z)\cdot\left(f'(g(x,y,z))\right)^2$.