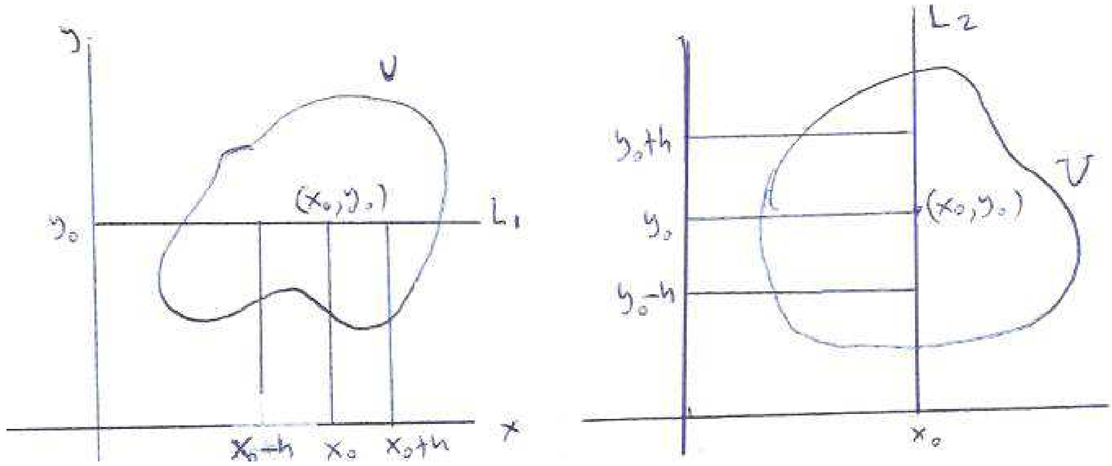
ΙΙ Διαφορικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Διαφόριση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Ένας στέρεος ορισμός της παραγώγισης για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ανάλογος με τον ορισμό για συναρτήσεις μιας μεταβλητής δεν είναι εκ των προτέρων σαφής.
Ένας τέτοιος κατάλληλος ορισμός θα πρέπει να έχει ως συνέπεια την συνέχεια της συνάρτησης την ύπαρξη « εφαπτομένου επιπέδου » στο γράφημα της f καθώς και τον κανόνα της αλυσίδας.
Σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να παραγωγίσουμε ως προς μία μεταβλητή κρατώντας τις υπόλοιπες σταθερές.
Έστω για απλότητα μια πραγματική συνάρτηση $f(x,y)$ δύο μεταβλητών ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο U του R^2. Θεωρούμε ένα σημείο $(x_0,y_0)\in U$, περιορίζουμε την f στην τομή του U με τις ευθείες L_1 και L_2 που διέρχονται από το (x_0,y_0) και είναι παράλληλες με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα και παραγωγίζουμε στο (x_0,y_0) τις προκύπτουσες συναρτήσεις.



Δηλαδή εξετάζουμε τα όρια: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$

Το μεν πρώτο όριο (αν υπάρχει) το συμβολίζουμε με $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ και το ονομάζουμε η <u>μερική παράγωγος</u> της f ως προς x στο (x_0,y_0) και το δεύτερο με $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ και το ονομάζουμε η <u>μερική παράγωγος</u> της f ως προς y στο (x_0,y_0).
Ο γενικότερος ορισμός διατυπώνεται ανάλογα.

5.1 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό $f : U \subseteq R^n \to R$ (πραγματική) συνάρτηση και $a = (a_1, ..., a_n) \in U$. Αν $j \in \{1, 2, ..., n\}$, η μερική παράγωγος της f στο a ως προς την x_j μεταβλητή είναι το ακόλουθο όριο αν βέβαια υπάρχει,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_j + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}$$

όπου $e_j = (0, 0, ...0, 1, 0, ..., 0)$ είναι το $j-$στο διάνυσμα της κανονικής βάσης $e_1, ..., e_n$ του R^n.

Αν η μερική παράγωγος της f ως προς την x_j μεταβλητή υπάρχει για κάθε $a \in U$ τότε ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση επί του U την οποία συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, δηλαδή, $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \subseteq R^n \to R$.

Ειδικότερα στην περίπτωση $n = 3$, θα χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$ ή f_x, f_y, f_z.

Αν η f είναι μια διανυσματική συνάρτηση (έστω $f : U \subseteq R^n \to R^m$) ώστε $f = (f_1, ..., f_m)$, μπορούμε να μιλάμε για τις μερικές παραγώγους των συντεταγμένων συναρτήσεων, για παράδειγμα η $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ είναι η μερική παράγωγος της k συντεταγμένης ως προς την μεταβλητή x_j, ($1 \le k \le m$ και $1 \le j \le n$).

Μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό $D_j f$ για τη μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Παραδείγματα 1) Αν $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2$, να βρεθούν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Λύση Για να βρούμε την $\frac{\partial f}{\partial x}$ κρατάμε το y σταθερό: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + 2xy^2$. Όμοια για να βρούμε την $\frac{\partial f}{\partial y}$ κρατάμε το x σταθερό: $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x^2 y$.

2) Έστω $z = x^2 \cdot \sin(3x + y^3)$. Να υπολογιστούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ και $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.

Λύση $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot \sin(3x + y^3) + 3x^2 \cdot \cos(3x + y^3)$. Επομένως

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin \pi + 3\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot \cos \pi = \frac{2\pi}{3} \cdot 0 + \frac{\pi^2}{3} \cdot (-1) = -\frac{\pi^2}{3}.$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 \cdot \cos(3x + y^3)$. Επομένως $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 3(1)^2 (1)^2 \cos(3+1) = 3\cos 4$.

3) Έστω $f\left(x,y,z\right)=x^2+2xy^2+yz^3$. Να βρεθούν οι f_x, f_y, f_z.

Λύση Για την f_x (δηλαδή την $\frac{\partial f}{\partial x}$) κρατάμε τις y και z σταθερές και παραγωγίζουμε ως προς x. Άρα $f_x\left(x,y,z\right)=2x+2y^2$. Ανάλογα, βρίσκουμε: $f_y\left(x,y,z\right)=4xy+z^3$ και $f_z\left(x,y,z\right)=3yz^2$

4)Έστω ότι η συνάρτηση $z=z\left(x,y\right)$ των x και y ικανοποιεί την εξίσωση $x^2z+yz^3=x$. Να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Λύση Παραγωγίζουμε την δοσμένη εξίσωση ως προς x κρατώντας το y σταθερό: $2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+3yz^2\frac{\partial z}{\partial x}=1$. Επιλύουμε την εξίσωση αυτή ως προς $\frac{\partial z}{\partial x}$ και βρίσκουμε $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-2xz}{x^2+3yz^2}$.

Ανάλογα, παραγωγίζουμε την δοσμένη εξίσωση ως προς y κρατώντας σταθερό το x: $x^2\frac{\partial z}{\partial y}+z^3+3yz^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$, άρα $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z^3}{x^2+3yz^2}$

5) Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων $f\left(x,y\right)=x^{\kappa}\cdot y^{\lambda}$ (μονωνύμων) είναι οι $\frac{\partial f}{\partial x}=:\kappa x^{\kappa-1}y^{\lambda}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}=:\lambda x^{\kappa}y^{\lambda-1}$ $\quad(\kappa,\lambda\in N)$

Γενικότερα αν $f\left(x_1,...,x_n\right)=x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}....x_n^{k_n}$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x_j}=k_jx_1^{k_1}...x_j^{k_j-1}...x_n^{k_n}$.

6) Αν $f\left(x_1,...,x_n\right)=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$ $\quad(\ =\left\|x\right\|$, όπου $x=\left(x_1,...,x_n\right)$) τότε, $\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{x_j}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}}$, $j=1,2,...,n$.

Η παραγώγιση γίνεται βέβαια στο ανοικτό $\Omega=R^n-\left\{\left(0,...,0\right)\right\}$.

Παρατηρούμε ότι οι, $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(0\right)$, $j=1,2,...,n$, <u>δεν </u>υπάρχουν (γιατί;).

Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο <u>δεν</u> συνεπάγεται κατ' ανάγκη την συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα. Έστω $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0, & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$.

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $\left(0,0\right)$ (αφού, $f\left(x,0\right)=0=f\left(0,y\right)$ για κάθε $x,y\in R$ και $f\left(x,x\right)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x\neq 0$).

Οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν όμως σε κάθε σημείο του R^2: $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ στο $R^2-\left\{\left(0,0\right)\right\}$ και $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=0$

Αναλόγως $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ στο $R^2-\{(0,0)\}$ και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

(Οι $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ υπολογίζονται εύκολα στο $U=R^2-\{(0,0)\}$, χρησιμοποιώντας π.χ. τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου συναρτήσεων από τον Απειροστικό Λογισμό).

Από το τελευταίο παράδειγμα (αλλά και από άλλα παραδείγματα) φαίνεται ότι η υπόθεση της ύπαρξης (όλων) των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο δεν είναι ο «σωστός» ορισμός της διαφορισιμότητας προκειμένου για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Για να καταλήξουμε στον ζητούμενο ορισμό θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό της παραγώγου συναρτήσεων $f:I\subseteq R\to R$ ορισμένων σε ένα ανοικτό διάστημα Ι του R.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $a\in I$, η f λέγεται διαφορίσιμη στο a αν το όριο $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=c$ (1) υπάρχει στο R. Τότε ο αριθμός c, καλείται η παράγωγος της f στο a και συμβολίζεται με $f'(a)$ ή $Df(a)$ ή και $\frac{df}{dx}(a)$. Ο ορισμός που δίνεται με την (1) <u>δεν</u> μπορεί να γενικευθεί ως έχει για συναρτήσεις $f:U\subseteq R^n\to R^m$ για $n\geq 2$, καθώς το $x-a$ είναι τότε ένα διάνυσμα και είναι αδύνατο να διαιρέσουμε τον αριθμό $f(x)-f(a)$ με το $x-a$. Η (1) μπορεί όμως να γραφεί ισοδύναμα ως εξής. $(c=f'(a))$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a}=0$ η τελευταία σχέση είναι ακόμη ισοδύναμη με την, $\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)-c(x-a)|}{|x-a|}=0$. (2)

Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση $\mathrm{T}(x)=cx, x\in R$ είναι γραμμική

Παρατηρούμε ότι η (2) εμπλέκει πηλίκα πραγματικών αριθμών και έτσι μπορεί να γενικευθεί για συναρτήσεις $f:U\subseteq R^n\to R$. Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν θέσομε $l(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ που είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $(a,f(a))$ και είναι εφαπτομένη στο γράφημα της f και ακόμη θέσομε $\varepsilon(x-a)=f(x)-l(x), x\in I$ τότε η (2) μπορεί να γραφεί ως, $\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon(x-a)}{x-a}=0$. Άρα, $x\in I, f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon(x-a)$ με $\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon(x-a)}{x-a}=0$. (3)

Η σχέση (3) σημαίνει ότι η διαφορισιμότητα είναι ένα βαθμό πάνω από την συνέχεια, αφού, $\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon(x-a)}{x-a}=0\Rightarrow\lim_{x\to a}\varepsilon(x-a)=0$ και το τελευταίο όριο σημαίνει ότι $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Σημείωση. Επειδή στην θεωρία της διαφόρισης συναρτήσεων είναι ουσιώδες η μεταβλητή x να προσεγγίζει το υπό εξέταση σημείο a από όλες τις δυνατές διευθύνσεις θα υποθέτομε πάντοτε ότι οι συναρτήσεις που εξετάζουμε είναι ορισμένες σε <u>ανοικτά</u> υποσύνολα του R^n.
Για λόγους απλότητας θα εξετάσουμε πρώτα την διαφορισιμότητα πραγματικών συναρτήσεων $f : U \subseteq R^n \to R, (m=1)$.

5.2 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό, $a = (a_1, ..., a_n) \in U$ και $f : U \to R$ συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a αν υπάρχει μια <u>γραμμική</u> συνάρτηση $\mathrm{T} : R^n \to R$ ώστε $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{|f(x) - f(a) - \mathrm{T}(x-a)|}{\|x-a\|} = 0$ (1)
Επειδή (όπως είναι εύκολο να αποδείξουμε) η γραμμική συνάρτηση Τ είναι μοναδική, αν υπάρχει, η Τ λέγεται το <u>διαφορικό της f στο a</u> και συμβολίζεται με $Df(a)$. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο U αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $a \in U$.
Θέτοντας $x - a = h$ η (1) μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα και ως εξής
$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)|}{\|h\|} = 0 \qquad (2)$$
Αν θέσομε $\varepsilon_a(h) = f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)$ για εκείνα τα $h \in R^n$ ώστε $a + h \in U$ η (2) μπορεί να γραφεί και ως
$$\lim_{h \to 0} \frac{|\varepsilon_a(h)|}{\|h\|} = 0 \quad \text{όπου} \quad f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \varepsilon_a(h) \quad (3)$$
Ας εξετάσομε τώρα πιο προσεκτικά τον ορισμό και τις συνέπειές του.
<u>Η μοναδικότητα του διαφορικού</u>: Έστω τυχόν $h \in R^n$.
Θεωρούμε $t \in R, t \neq 0$ με $|t|$ αρκετά μικρό ώστε $a + th \in U$, έπεται τότε από την (3) ότι $Df(a)(h) = \frac{1}{t}\big(f(a+th) - f(a)\big) - \frac{1}{t}\varepsilon_a(th)$.
Άρα $Df(a)(h) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(a+th) - f(a)\big)$ που σημαίνει ότι η τιμή $Df(a)(h)$ της $Df(a)$ είναι πλήρως ορισμένη από την συνάρτηση f.

<u>Η συνέχεια της f στο a:</u> Επειδή $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|\varepsilon_a(h)|}{\|h\|} = 0$, αν $0 < \varepsilon < 1$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $h \neq 0$ και $\|h\| < \delta$ τότε $\dfrac{|\varepsilon_a(h)|}{\|h\|} \leq \varepsilon$ ή $|\varepsilon_a(h)| \leq \varepsilon \|h\|$.
Υποθέτοντας – όπως μπορούμε- ότι $0 < \delta \leq \varepsilon$ συμπεραίνουμε ότι, αν $\|h\| \leq \delta$ τότε $|\varepsilon_a(h)| \leq \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 < \varepsilon$, συνεπώς $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0$. Άρα πάλι από την (3) έπεται ότι $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. Δηλαδή η f είναι συνεχής στο a.

<u>Η σχέση της διαφορισιμότητας και μερικών παραγώγων</u>.

Θα αποδείξουμε ότι ύπαρξη του διαφορικού της f στο $a \in U$ έχει ως συνέπεια την ύπαρξη όλων των μερικών παραγώγων, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ της f στο a.

Πράγματι εφόσον η $Df(a)$ είναι γραμμική συνάρτηση από τον R^n στο R θα υπάρχει $c = (c_1,...,c_n) \in R^n$ (όπου $c_k = Df(a)(e_k), k = 1,2,...,n$) ώστε $Df(a)(h) = c \cdot h = c_1 h_1 + ... + c_n h_n, h = (h_1,...,h_n) \in R^n$.

Έστω $j \in \{1,2,...,n\}$, ας αφήσουμε το x να κινηθεί στην ευθεία $L = \{a + te_j : t \in R\}$ του R^n που διέρχεται από το a και έχει την διεύθυνση του διανύσματος e_j της συνήθους βάσης του R^n, δηλαδή, θέτουμε $h = te_j$ με $t \in R$. Τότε από την μορφή (2) του ορισμού του διαφορικού θα έχουμε: $\lim_{t\to 0}\frac{\left|f(a+te_j) - f(a) - Df(a)(te_j)\right|}{|t|} = 0$ ή

$\lim_{t\to 0}\frac{\left|f(a+te_j) - f(a) - tc_j\right|}{|t|} = 0$ ή $\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} - c_j\right| = 0$ ή

$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = c_j$. Από τον ορισμό της $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ μερικής παραγώγου συμπεραίνουμε ότι : $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = c_j = Df(a)(e_j)$.

Συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο a υπάρχουν (με την υπόθεση ότι η f είναι διαφορίσημη στο a) και δίνονται από τις τιμές του διαφορικού στα διανύσματα της <u>συνήθους</u> βάσης του R^n, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = Df(a)(e_j),\ j = 1,2,...,n$.

(Παρατηρούμε ότι από την παραπάνω διαδικασία έπεται πάλι η μοναδικότητα του διαφορικού.)

Συμβολισμός: Το διάνυσμα $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ ονομάζεται η <u>κλίση</u> (gradient) ή το <u>ανάδελτα</u> της (διαφορίσημης στην θέση a) συνάρτησης f και συμβολίζεται με $\nabla f(a)$, δηλαδή έχουμε, $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

Παρατηρούμε ότι αν $h = (h_1,...,h_n) \in R^n$ τότε,

$$Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n = \nabla f(a) \cdot h.$$

<u>Διαφορισιμότητα και κατευθυνόμενες παράγωγοι</u>: Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό $f : U \to R$ συνάρτηση και $a \in U$. Αν $h \in R^n$ με $h \neq 0$. <u>Η κατευθυνόμενη παράγωγος της</u> f στο a και στην <u>κατεύθυνση</u> h συμβολιζόμενη με $D_h f(a)$ είναι το όριο (αν υπάρχει) $D_h f(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th) - f(a)}{t}$. Με άλλα λόγια ο αριθμός $D_h f(a)$ είναι η

παράγωγος της συνάρτησης $g:(-\delta,\delta)\to R : g(t)=f(a+th)$ στο $t=0$ (επειδή το U είναι ανοικτό στο R^n υπάρχει $\delta>0 : a+th\in U$ για κάθε $|t|<\delta$). Η συνάρτηση g είναι ο περιορισμός της f στην τομή του U με την ευθεία $L=\{a+th : t\in R\}$, η L είναι η ευθεία του R^n που διέρχεται από το σημείο a και έχει την διεύθυνση του διανύσματος h (είναι παράλληλη με το h).

Εύκολα αποδεικνύεται τώρα το ακόλουθο αποτέλεσμα (το οποίο γενικεύει το προηγούμενο που αφορά τις μερικές παραγώγους).

5.3 Πρόταση. Αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσημη στο a τότε η f έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο a σε όλες τις κατευθύνσεις $h\in R^n-\{0\}$, μάλιστα ισχύει,
$$D_h f(a)=Df(a)(h)=\nabla f(a)\cdot h .$$

Απόδειξη Έστω $h\in R^n$ με $h\neq 0$. Όπως και στην περίπτωση της απόδειξης της ύπαρξης των μερικών παραγώγων θα έχουμε:
$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(a+th)-f(a)-Df(a)(th)}{\|th\|}\right|=0 \text{ ή } \lim_{t\to 0}\frac{1}{\|h\|}\left|\frac{f(a+th)-f(a)-tDf(a)(h)}{t}\right|=0 \text{ ή}$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)-tDf(a)(h)}{t}=0 \text{ ή } \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}=Df(a)(h).$$
Συνεπώς,
$$D_h f(a)=Df(a)(h)=\nabla f(a)\cdot h .$$

Παρατήρηση. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι μερικές παράγωγοι της f στο a δεν είναι τίποτα άλλο από τις παραγώγους της f στις κατευθύνσεις των διανυσμάτων της κανονικής βάσης $\{e_1,\dots,e_n\}$ του R^n, δηλαδή $D_{e_k} f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(a), k=1,2,\dots,n$.

<u>Το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος μιας διαφορίσημης συνάρτησης</u>.

Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό και $f:U\to R$ διαφορίσημη συνάρτηση στο $a\in U$. Κατ', αναλογία με την περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής και βασιζόμενοι στην προηγούμενη συζήτηση ορίζουμε ως <u>εφαπτόμενο επίπεδο</u> του γραφήματος της f στο $(a, f(a))\in R^{n+1}$ το $n-$<u>διάστατο επίπεδο</u> με εξίσωση

(1)
$$z=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)$$
$$=f(a)+Df(a)(x-a)=f(a)+\nabla f(a)\cdot(x-a)$$
Όπου $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ και $a=(a_1,\dots,a_n)\in U$.

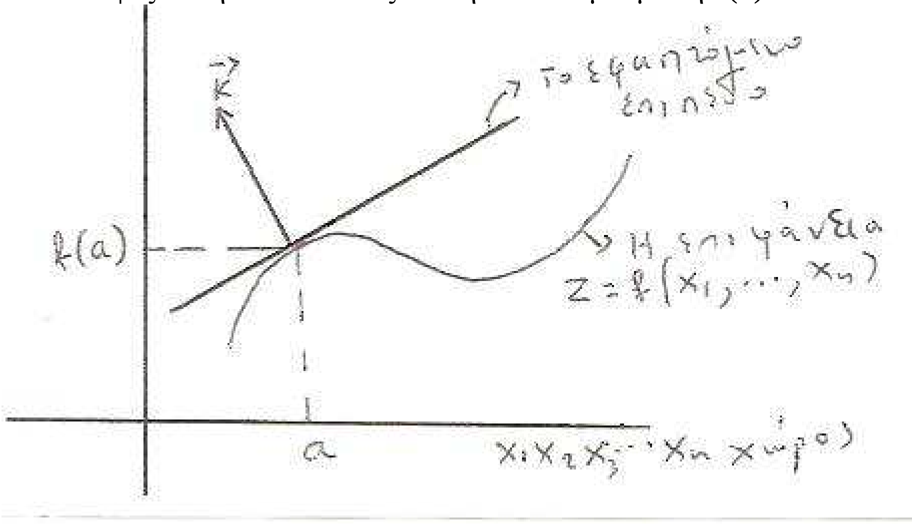
Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι το παραπάνω επίπεδο στον $n+1-$διάστατο χώρο $x_1x_2\dots x_n z$ εφάπτεται στην επιφάνεια με εξίσωση $z=f(x_1,\dots,x_n)$ στο σημείο $(a, f(a))$ και βέβαια είναι το μόνο επίπεδο με την ιδιότητα αυτή. Η γεωμετρική σημασία του εφαπτόμενου επιπέδου γίνεται καλύτερα κατανοητή στην περίπτωση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $z=f(x,y)$ οπότε το γράφημά της είναι η επιφάνεια $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$ του R^3 και το εφαπτόμενο επίπεδο αυτής της επιφάνειας στο $(a, f(a))$ είναι το επίπεδο του R^3 με εξίσωση,

(2) $$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2), \qquad (x, y) \in R^2, a = (a_1, a_2) \in U .$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $k = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(a), 1 \right) = \left(-\nabla f(a), 1 \right)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο με εξίσωση την (1) και συνεπώς -εξ' ορισμού – κάθετο και στην επιφάνεια $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ στο σημείο $(a, f(a))$. (Το ζήτημα αυτό θα ξανασυζητηθεί αργότερα). Ας αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό (για λόγους απλότητας) στην περίπτωση των δύο μεταβλητών, δηλαδή όταν έχουμε το εφαπτόμενο επίπεδο Ε με εξίσωση την (2). Παρατηρούμε ότι $(a, f(a)) = (a_1, a_2, f(a)) \in \mathrm{E}$, επομένως αν $(x_1, x_2, z) \in \mathrm{E}$ τότε το διάνυσμα $(a_1, a_2, f(a)) - (x_1, x_2, z) = (a_1 - x_1, a_2 - x_2, f(a) - z)$ είναι παράλληλο με το Ε. Άρα για να δείξουμε ότι $k \perp \mathrm{E}$ είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε $(x_1, x_2, z) \in \mathrm{E}$ ισχύει ότι το εσωτερικό γινόμενο,

$$(a_1 - x_1, a_2 - x_2, f(a) - z) \cdot k = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(a_1 - x_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(a_2 - x_2) + f(a) - z = 0$$

Είναι σαφές ότι η τελευταία εξίσωση ισοδυναμεί με την (2).



Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε το γενικό ορισμό του διαφορικού για διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής.

Υπενθυμίζουμε πρώτα την σχέση (ταύτιση) γραμμικών απεικονίσεων $\mathrm{T} : R^n \to R^m$ και $m \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Έστω $\mathrm{T} : R^n \to R^m$ γραμμική απεικόνιση, τότε οι συντεταγμένες συναρτήσεις της Τ είναι οι $\mathrm{T}_i = \pi_i o \mathrm{T}, i = 1, 2, \ldots, m$. Δηλαδή, $\mathrm{T}(x) = (\mathrm{T}_1(x), \ldots, \mathrm{T}_m(x)), x \in R^n$. Θέτομε $\mathrm{T}_i(e_j) = a_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ όπου $e_1, \ldots, e_n$ είναι η κανονική βάση του R^n. Τότε ορίζεται ο $m \times n$ πίνακας $\mathrm{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Αν $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$, τότε $\mathrm{T}(x)=(\mathrm{T}_1(x),...,\mathrm{T}_m(x))=(a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n,a_{21}x_1+...+a_{2n}x_n,....,a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n)=$

$$=\mathrm{A}\cdot x=\mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}=\text{το γινόμενο του πίνακα Α με το διάνυσμα στήλη, } x=\begin{pmatrix}x_1\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Αντίστροφα, αν $\mathrm{A}=(a_{ij})$ είναι $m\times n$ πίνακας τότε στον Α αντιστοιχεί η γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}:R^n\to R^m$ όπου $\mathrm{T}(x)=\mathrm{A}\cdot x, x=(x_1,...,x_n)\in R^n$. Έτσι εγκαθιδρύεται μία $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ του χώρου των γραμμικών απεικονίσεων $L(R^n;R^m)$ και του χώρου $V(m\times n;R)$ των, $m\times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

$$\mathrm{T}\in L(R^n;R^m)\to \mathrm{A}\in V(m\times n;R):\mathrm{T}(x)=\mathrm{A}\cdot x, x\in R^n.$$

Σημειώνουμε ακόμη ότι:

(α) οι χώροι $L(R^n;R^m)$ και $V(m\times n;R)$ είναι (με τις συνήθεις πράξεις ο καθένας) <u>διανυσματικοί</u> και η ανωτέρω αντιστοιχία <u>γραμμική </u>απεικόνιση. Μέσω της αντιστοιχίας αυτής ουσιαστικά <u>ταυτίζουμε</u> τους πίνακες με τις γραμμικές απεικονίσεις.

β) $\dim L(R^n;R^m)=\dim V(m\times n;R)=m\cdot n$ (γιατί;).

5.4 Ορισμός Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό, $a=(a_1,...,a_n)\in U$ και $f:U\to R^m, f=(f_1,...,f_m)$ συνάρτηση. Η f θα λέγεται διαφορίσιμη στο a αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}:R^n\to R^m$, $\mathrm{T}=(\mathrm{T}_1,...,\mathrm{T}_m)$ ώστε

$$\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-f(a)-\mathrm{T}(x-a)\|}{\|x-a\|}=0 \quad (1)$$

Θέτοντας $x-a=h$ το όριο (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-\mathrm{T}(h)\|}{\|h\|}=0 \quad (2).$$

Η (μοναδική) γραμμική συνάρτηση Τ που ικανοποιεί την (1) (ή την (2)) ονομάζεται το <u>διαφορικό</u> της f στο a και συμβολίζεται με $Df(a)$.

Έστω $f=(f_1,...,f_m)$ συνάρτηση διαφορίσιμη στο σημείο a, παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1)Επειδή οι συντεταγμένες συναρτήσεις της, $x\in U-\{a\}\to\dfrac{f(x)-f(a)-\mathrm{T}(x-a)}{\|x-a\|}\in R^m$ είναι οι, $x\in U-\{a\}\to\dfrac{f_i(x)-f_i(a)-\mathrm{T}_i(x-a)}{\|x-a\|}\in R,\quad i=1,2,...,m$ έπεται από την θεωρία των ορίων ότι το όριο στην (1) ισούται με 0 αν και μόνο αν τα όρια $\lim_{x\to a}\frac{f_i(x)-f_i(a)-T_i(x-a)}{\|x-a\|}=0$ για κάθε $i=1,2,...,m$.

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a αν και μόνο αν η κάθε μια από τις συναρτήσεις $f_1,...,f_m$ είναι διαφορίσιμη στο a και τότε $Df_i(a)=T_i$ για κάθε $i=1,2,...,m$. Συνεπώς, $Df(a)=(Df_1(a),...,Df_m(a))$.

2)Είναι προφανές, αφού οι $f_1,...,f_m$ είναι πραγματικές διαφορίσιμες συναρτήσεις, ότι οι μερικές παράγωγοι των $f_1,...,f_m$ στο a υπάρχουν και ισχύει, $Df_i(a)(h)=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a)h_n$, $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$ όπου $i=1,2,...,m$.

Έπεται ιδιαίτερα ότι η $T(=Df(a))$ είναι μοναδική.

3)Η διαφορισιμότητα στο a των $f_1,...,f_m$ έχει ως συνέπεια την συνέχεια αυτών των συναρτήσεων στο a, επομένως και η $f=(f_1,...,f_m)$ είναι συνεχής στο a.

4) Η διαφορισιμότητα της $f=(f_1,...,f_m)$ στο a σημαίνει ότι η f «γύρω» και «κοντά» στο σημείο a, συμπεριφέρεται περίπου όπως η γραμμική συσχετισμένη συνάρτηση $L(x)=f(a)+Df(a)(x-a), x\in R^n$. Πράγματι ο ορισμός του διαφορικού της f στο a σημαίνει όχι απλώς ότι το όριο $\lim_{x\to a}\|f(x)-L(x)\|=0$ αλλά ακόμη περισσότερο ότι η ποσότητα $\|f(x)-L(x)\|$ διαιρεμένη με την ποσότητα $\|x-a\|$ $(x\neq a)$ τείνει στο 0 καθώς το x τείνει στο a.

(Το γράφημα της $L, G(L)=\{(x,L(x)):x\in R^n\}\subseteq R^n\times R^m\cong R^{n+m}$ ορίζεται ως ο γεωμετρικός εφαπτόμενος χώρος του γραφήματος της f, $G(f)=\{(x,f(x)):x\in U\}\subseteq U\times R^m$ στο $(a,f(a))$. Πρβλ και τον ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος συνάρτησης.)

5)Ειδικότερα αν η f είναι συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής ($n=1$) παρατηρούμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $f_1,...,f_m$ ως πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής είναι διαφορίσιμες στο a, αυτό προκύπτει αμέσως από το γεγονός ότι: $Df(a)=(Df_1(a),...,Df_m(a))=(f_1'(a),...,f_m'(a))$. Γράφουμε τότε $f'(a)=Df(a)$.

Βέβαια η διαφορισιμότητα μιας διανυσματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής μπορεί να ορισθεί και απ' ευθείας (χωρίς την έννοια του διαφορικού συνάρτησης πολλών μεταβλητών) με τον τύπο

$$f'(a)=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \text{ (αν το όριο υπάρχει).}$$

6)Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση διαφορικό $Df(a)=(Df_1(a),...,Df_m(a))$ της f στο a ονομάζεται <u>ο πίνακας Jacobi</u> της f στο a και συμβολίζεται με $J_{f(a)}$. Παρατηρούμε ότι (σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε του ορισμού του διαφορικού διανυσματικής συνάρτησης), $J_{f(a)}=\begin{pmatrix}\nabla f_1(a)\\ \nabla f_2(a)\\ .\\ .\\ \nabla f_m(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$ (δες και την παρατήρηση (2)).

Έπεται ότι, $Df(a)(h)=J_{f(a)}\cdot h$ $(=J_{f(a)}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ .\\ h_n\end{pmatrix})$ με $h=(h_1,..,h_n)\in R^n$.

Αν $m=1$ τότε ο πίνακας Jacobi <u>συμπίπτει</u> με το διάνυσμα γραμμή $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ δηλαδή με το ανάδελτα $\nabla f(a)$ της f στο a.

Παραδείγματα: 1) Κάθε σταθερή συνάρτηση $f:U\subseteq R^n\to R^m$ είναι διαφορίσιμη στο U και $Df(a)=0$ για κάθε $a\in U$. Πράγματι έστω, $f(x)=c\in R^m$ για κάθε $x\in U$. Αν $a\in U$ τότε $f(x)-f(a)=c-c=0$, συνεπώς η μόνη γραμμική συνάρτηση $\mathrm{T}:R^n\to R^m$ που ικανοποιεί τον ορισμό του διαφορικού είναι η σταθερά μηδέν.

2) Έστω $f:R^n\to R^m$ γραμμική συνάρτηση. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στον R^n και $Df(a)=f$ για κάθε $a\in R^n$.
Πράγματι, αν $a\in R^n$, τότε $f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)=f(x-a)-f(x-a)=0$ για κάθε $x\in R^n$ Από την μοναδικότητα του διαφορικού έπεται το συμπέρασμα.

3)Να αποδειχθεί με χρήση του ορισμού του διαφορικού ότι η συνάρτηση $f(x,y)=xy+y^3$ είναι διαφορίσιμη στο R^2 και να υπολογιστούν το διαφορικό, η κλίση της f στο σημείο $a=(a_1,a_2)$ καθώς και η εξίσωση του εφαπτόμενου επίπεδου του γραφήματος της f στο $(a,f(a))$.

Οι μερικές παράγωγοι της f είναι: $\frac{\partial f}{\partial x}=y$ και $\frac{\partial f}{\partial y}=x+3y^2$. Αν η f είναι διαφορίσημη στο $a=(a_1,a_2)$ τότε το διαφορικό της εκεί θα έχει αναγκαία τη μορφή

(1) $Df(a)(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2=a_2h_1+(a_1+3a_2^2)h_2$ όπου $h=(h_1,h_2)\in R^2$.

Έπεται ότι αν $h=(h_1,h_2)\neq 0$ τότε θα έχουμε $\frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|}=\frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-Df(a_1,a_2)(h_1,h_2)}{\|h\|}=$

$$\frac{(a_1+h_1)(a_2+h_2)+(a_2+h_2)^3-(a_1a_2+a_2^3)-\left[a_2h_1+(a_1+3a_2^2)h_2\right]}{\|h\|}=$$

$$\frac{a_1a_2+a_1h_2+a_2h_1+h_1h_2+a_2^3+h_2^3+3a_2h_2^2+3a_2^2h_2-a_1a_2-a_2^3-a_2h_1-a_1h_2-3a_2^2h_2}{\|h\|}=$$

$$\frac{h_1h_2+h_2^3+3a_2h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+h_2^2\cdot\frac{h_2+3a_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{}0.$$ Εφόσον,

$$\frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_2^2}}=|h_1|\xrightarrow[h_1\to 0]{}0 \text{ και } \left|h_2^2\cdot\frac{h_2+3a_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\le\frac{h_2^2}{|h_2|}\cdot|h_2+3a_2|\xrightarrow[h_2\to 0]{}0.$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι πράγματι το διαφορικό της f στο $a=(a_1,a_2)$ είναι η γραμμική απεικόνιση που περιγράψαμε στην (1) και συνεπώς η κλίση της f στο a είναι $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)=(a_2,a_1+3a_2^2)$. Η εξίσωση του εφαπτόμενου επίπεδου στο $(a,f(a))$ είναι η $z=(a_1a_2+a_2^3)+a_2(x-a_1)+(a_1+3a_2^2)(y-a_2)$

4)Το παράδειγμα που θα θεωρήσουμε τώρα το έχουμε χρησιμοποιήσει και στην παράγραφο των συνεχών συναρτήσεων (παρατήρηση 3.8).

Έστω $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Εξετάζουμε τις κατευθυνόμενες παραγώγους στο $(0,0)$ της g, και παρατηρούμε ότι αν $h=(h_1,h_2)\neq(0,0)$, τότε $D_hg(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(th)-g(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{th_1\cdot(th_2)^2}{(th_1)^2+(th_2)^4}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{h_1h_2^2}{h_1^2+t^2h_2^4}=\begin{cases}\dfrac{h_2^2}{h_1}, & h_1\neq 0\\ 0, & h_1=0\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι κατευθυνόμενες παράγωγοι στο $(0,0)$ υπάρχουν προς όλες τις κατευθύνσεις. Όμως όπως γνωρίζουμε η g δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ και επομένως δεν μπορεί να είναι διαφορίσημη στο ίδιο σημείο. (Καθόσον αφορά την μη συνέχεια της g στο $(0,0)$, υπενθυμίζουμε ότι αν $\lambda\in R$ και $t\in R$ με $t\neq 0$, τότε $g(\lambda t^2,t)=g(\lambda,1)=\frac{\lambda}{\lambda^2+1}$, δηλαδή η g παραμένει σταθερή αν περιοριστεί στην παραβολή $\pi_\lambda=\{(x,y):x=\lambda y^2\}$, η οποία διέρχεται βέβαια από το $(0,0)$.

(Ακριβέστερα παραμένει σταθερή επί του συνόλου $\pi_\lambda-\{(0,0)\}$.)

Παρατήρηση. Αν η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο a στην κατεύθυνση $h\neq 0$ υπάρχει, τότε ο περιορισμός της f στην ευθεία $L=\{a+th:t\in R\}$ είναι συνεχής στο σημείο a (γιατί;)