Ασκήσεις

1)Αποδείξτε χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό της συνεκτικότητας ότι τα ακόλουθα σύνολα δεν είναι συνεκτικά.

(α) Η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ στον R^2.

(β) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του R^n με τουλάχιστον δύο σημεία.

(γ) $\left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ και } y \neq x+1\right\}$

(δ) Η ένωση των ανοικτών δίσκων $\mathrm{B}\left((0,0),\delta\right)$ και $\mathrm{B}\left((1,1),\delta\right)$, του R^2, όπου $\delta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2)Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n. Αποδείξτε ότι το U είναι μη συνεκτικό αν και μόνο αν $U = \mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}$, όπου A, B μη κενά ανοικτά και ξένα υποσύνολα του R^n. Αποδείξτε το αντίστοιχο αποτέλεσμα αντικαθιστώντας παντού το επίθετο «ανοικτό» με το επίθετο «κλειστό».

3)Έστω $\left(\mathrm{A}_n\right)_{n\geq 1}$ ακολουθία συνεκτικών υποσυνόλων του R^n ώστε $\mathrm{A}_n \bigcap \mathrm{A}_{n+1} \neq \varnothing$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ είναι συνεκτικό στον R^n

[Υπόδειξη: Τα σύνολα $\mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2 \bigcup \mathrm{A}_3, \ldots..$ είναι συνεκτικά].

4)Έστω $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνεχής συνάρτηση όπου A συνεκτικό στον R^n. Αποδείξτε ότι το γράφημα της f, δηλαδή το σύνολο $G(f) = \left\{\left(x, f(x)\right) : x \in \mathrm{A}\right\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $R^n \times R^m$.

5)Αποδείξτε ότι η επιφάνεια $S^{n-1} = \left\{x \in R^n : \|x\| = 1\right\}$ της Ευκλείδειας μοναδιαίας σφαίρας $(n \geq 2)$, είναι σύνολο συνεκτικό στον R^n. [Υπόδειξη: Η απεικόνιση $x \in R^n - \{0\} \to \dfrac{x}{\|x\|} \in R^n$, είναι συνεχής].

6) Θεωρήστε μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων κάποιου ευκλείδειου χώρου τα οποία έχουν ανά δύο μια κενή τομή. Αποδείξτε ότι η ένωση των μελών της είναι συνεκτικό σύνολο.