Ασκήσεις

1) Αποδείξτε με χρήση του χαρακτηρισμού της ομοιόμορφης συνέχειας με ακολουθίες ότι οι συναρτήσεις: (α) $f(x)=x^2, x\geq 0$, (β) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, (γ) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z$ και (δ) $f(x)=\dfrac{x}{\|x\|}$, $x\in R^n$, $x\neq 0$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς,

2)Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις, (α) $f(x)=\log x, x\in[c,+\infty)$ όπου $c>0$, (β) $f(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$, και (γ) $f(x)=\left(|a_1x_1+...+a_nx_n|\right)^{\frac{1}{2}}$, $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ και $a_1,...,a_n$ πραγματικές σταθερές, είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

3) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $(x,y)\in R^2\to\max(x,y)$ και $(x,y)\in R^2\to\min(x,y)$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

4) Αποδείξτε ότι αν K είναι φραγμένο και μη κενό υποσύνολο του R^n τότε η κλειστότητα $\overline{\mathrm{K}}$ του K είναι συμπαγές σύνολο.

5) Έστω $\mathrm{K}_1\supseteq\mathrm{K}_2\supseteq....\supseteq\mathrm{K}_n\supseteq...$, φθίνουσα ακολουθία συμπαγών μη κενών υποσυνόλων του R^n,αποδείξτε ότι η $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{K}_n$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του R^n.

6) Έστω A κλειστό μη κενό υποσύνολο του R^n και $a\in R^n$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\|x-a\|, x\in R^n$, έχει ελάχιστη τιμή επί του A. Δηλαδή υπάρχει $x_1\in\mathrm{A}:\|x-x_0\|\geq\|x_1-x_0\|$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$. [Υπόδειξη. Έστω $m=\inf\left\{\|x-a\|:x\in\mathrm{A}\right\}$. Αν $\varepsilon>0$, το σύνολο $\left\{x\in\mathrm{A}:\|x-a\|\leq m+\varepsilon\right\}$ είναι κλειστό και φραγμένο]

7)Έστω $f:\overline{\mathrm{B}}(0,\mathrm{M})\to R$ συνεχής συνάρτηση (όπου $\overline{\mathrm{B}}(0,\mathrm{M})=\left\{x\in R^n:\|x\|\leq\mathrm{M}\right\}$). Θέτομε $g(r)=\sup\left\{|f(x)|:\|x\|\leq r\right\}, 0\leq r\leq\mathrm{M}$. Τότε η g είναι συνεχής συνάρτηση του $r\in[0,\mathrm{M}]$.

[Υπόδειξη. Η g είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,\mathrm{M}]$ και συνεπώς τα πλευρικά όρια $g(r+0)=\lim\limits_{\substack{\rho\to r\\ \rho>r}}g(\rho)$ και $g(r-0)=\lim\limits_{\substack{\rho\to r\\ \rho<r}}g(\rho)$ υπάρχουν και ισχύει $g(r+0)\leq g(r)\leq g(r-0)$. Αποδείξτε ότι $g(r)=g(r+0)=g(r-0)$.]