Ασκήσεις

1)Αποδείξτε ότι: (α) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=0$ και (β) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+x-xy-y}{x-y}=1$

2)Αποδείξτε ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$, (β) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$,

(γ) $f(x,y)=\dfrac{x-y^2}{x^2+y^2}$, (δ) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

3)Έστω $f:R^2\to R$ συνάρτηση. Υποθέτομε ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ υπάρχει. Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ υπάρχουν για κάθε $y\in R$ (αντίστοιχα τα όρια $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ υπάρχουν για κάθε $x\in R$) αποδείξτε ότι: $\lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right]=L$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right]=L$).

4) Σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις καθορίστε αν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ υπάρχουν και οποτεδήποτε υπάρχουν υπολογίστε τα:

(α) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (β) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(γ) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0\\ y, & x=0\end{cases}$ (δ) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & x\neq -y\\ 0, & x+y=0\end{cases}$