1)Έστω $\mathrm{B}(x,\delta)$ και $\mathrm{B}(y,\delta)$ ανοικτές σφαίρες στον R^n ($x \neq y$ και $\delta > 0$). Αποδείξτε ότι $\mathrm{B}(x,\delta)\bigcap \mathrm{B}(y,\delta) = \varnothing$ αν και μόνο αν $\delta \leq \frac{1}{2}\|x-y\|$.

2)Βρείτε τα $\mathrm{int}(\mathrm{A}), \overline{\mathrm{A}}$ και $\partial \mathrm{A}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\left\{x \in R^n : 0 < \|x - x_0\| \leq \delta\right\}, \delta > 0$

(β) $\left\{x \in R^n : \|x - x_0\| = \delta\right\}, \delta > 0$

(γ) $\left\{(x,y) \in R^2 : 0 < y < x+1, x > -1\right\}$

(δ) $\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\right\}$

(ε) $\left\{(x,y) \in R^2 :\right.$ είτε ο x είτε ο y είναι άρρητος$\left.\right\}$

(στ) Το Α είναι πεπερασμένο υποσύνολο του R^n

(ζ) $\left\{x_n : n \geq 1\right\} \bigcup \left\{x\right\}$, όπου $(x_n) \subseteq R^n$, $x \in R^n$, $x_n \to x$

(η) [0,1] x [0,1] ως υποσύνολο του ευκλείδειου επιπέδου.

(θ)Ποια από τα παραπάνω σύνολα είναι ανοικτά και ποια κλειστά;

3)Αν $\mathrm{A},\mathrm{B} \subseteq R^n$ αποδείξτε ότι:

(α) $\partial \mathrm{A} = \partial\left(\mathrm{A}^c\right)$, (β) $\overline{\mathrm{A}} = \overline{\left(\overline{\mathrm{A}}\right)}$, (γ) $\mathrm{int}(\mathrm{A}) = \left(\overline{\mathrm{A}^c}\right)^c$, (δ) $\mathrm{int}\left(\mathrm{A}\bigcap \mathrm{B}\right) = \mathrm{int}(\mathrm{A})\bigcap \mathrm{int}(\mathrm{B})$,

(ε) $\overline{\mathrm{A}\bigcup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}}\bigcup \overline{\mathrm{B}}$, (στ) $\mathrm{int}\left(\mathrm{A}\bigcup \mathrm{B}\right) \supseteq \mathrm{int}(\mathrm{A})\bigcup \mathrm{int}(\mathrm{B})$, (ζ) $\overline{\mathrm{A}\bigcap \mathrm{B}} \subseteq \overline{\mathrm{A}}\bigcap \overline{\mathrm{B}}$,

(η) $\overline{\mathrm{A}} = \bigcap$ {F $\subseteq$ R^n : F κλειστό και Α $\subseteq$F}.

Στα (στ) και (ζ) δώστε παραδείγματα όπου η ισότητα δεν ισχύει.

4)Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου Α αν:

(α) $\mathrm{A} = \left\{(-1)^n \frac{n}{1+n} : n \in N\right\}$, (β) $\mathrm{A} = \left\{\left(\cos\frac{2\pi n}{5}, \sin\frac{2\pi n}{5}\right) : n \in N\right\}$.

(γ) $\mathrm{A} = \left\{\left(t_n \cdot \cos\frac{2\pi n}{5}, t_n \cdot \sin\frac{2\pi n}{5}\right) : t_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1\right\}$.

(δ) $\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in R^2 : \left(x^2 + y^2\right)\left(y^2 - x^2 + 1\right) \leq 0\right\}$.

(ε) $\mathrm{A} = \left\{\cos n : n \in N\right\}$. [Για το (ε) συμβουλευτείτε την παρατήρηση της σελίδας 13].

5) Έστω $a \in R^n, a \neq 0$. (α) Δείξτε ότι ο ημίχωρος $\left\{x \in R^n : a \cdot x < c\right\}$ ($c \in R$) είναι ανοικτό σύνολο [Υπόδειξη $|a \cdot y - a \cdot x| \leq \|a\| \cdot \|y - x\|$]

(β) Δείξτε ότι το σύνολο $\left\{x \in R^n : a \cdot x \geq c\right\}$ είναι κλειστό, χρησιμοποιώντας το (α) και

(γ) ότι το υπερεπίπεδο $\left\{x \in R^n : a \cdot x = c\right\}$ είναι κλειστό σύνολο. [Τα (α), (β) και (γ) μπορούν να συναχθούν και από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων σε επόμενη παράγραφο]