Ασκήσεις

1)Βρείτε τα όρια αν υπάρχουν των ακολουθιών:

(α) $\left(\frac{1+n}{1-4n},\frac{2^n}{n!},(0,1)^n\right)$, (β) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n-\sqrt[n]{n^8+5}},\sqrt[n^3]{5}\right)$

(γ) $\left(1-\frac{1}{3^n},\frac{2n^5+10^n}{n!},\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\right)$, (δ) $\left(\frac{n^3}{5n^2+8n+4},\sqrt[n]{n^8-100n^7+n^2}\right)$

2)(α) Διατυπώστε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy (βασικής ακολουθίας) στον Ευκλείδειο χώρο R^n και αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy.
(β) Αποδείξτε ότι ο Ευκλείδειος χώρος είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα.

3)(α) Μια σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa$ στον R^n λέγεται απόλυτα συγκλίνουσα, αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\|x_\kappa\|$ είναι συγκλίνουσα. Αποδείξτε ότι κάθε απόλυτα συγκλίνουσα σειρά είναι και συγκλίνουσα.
(β) Αν η σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa$ είναι συγκλίνουσα, αποδείξτε ότι η ακολουθία $x_\kappa \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$

[Υπόδειξη για το (α): Η ακολουθία $S_m = x_1+...+x_m, m \geq 1$, των μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy].

4) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση (απόλυτη και απλή) τις σειρές:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{n!}\right)$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-4n},\frac{n}{5^n}\right)$ και (γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n^3}{n^2},\frac{1}{n^5},\frac{(-1)^n}{n}\right)$.