Ασκήσεις

(1) Έστω $x, y \in R^n$ με $y \neq 0$. Αποδείξτε ότι $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\|$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \geq 0$ ώστε $x = \lambda y$.

(2) Έστω $x_1, ..., x_m \in R^n$. Αποδείξτε ότι,

$$\|x_1 + ... + x_m\| \leq \|x_1\| + ...\|x_m\|.$$

Επιπλέον αποδείξτε ότι ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει $y \neq 0$ και $\lambda_\kappa \geq 0, \kappa = 1, 2, ..., m$ ώστε $x_\kappa = \lambda_\kappa y, \kappa = 1, 2, ..., m$. [Υπόδειξη Εξετάστε πρώτα την περίπτωση $m = 2$ και προχωρήστε με επαγωγή].

(3) Αν $x, y \in R^n$, αποδείξτε ότι:

(ι) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$.

(ιι) $\|x + y\| \cdot \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$, με ισότητα αν και μόνο αν $x \cdot y = 0$

(ιιι) Συσχετίστε την ταυτότητα (ι) και την ανισότητα (ιι) με παραλληλόγραμμα.

(*) (4)Μια ορθοκανονική βάση του R^n είναι μια βάση $\{a_1, ..., a_n\}$ του R^n ώστε $a_\kappa \cdot a_\lambda = \delta_{\kappa\lambda}$, όπου $\delta_{\kappa\lambda} = 0$ αν $\kappa \neq \lambda$ και $\delta_{\kappa\lambda} = 1$ αν $\kappa = \lambda$, $\kappa, \lambda = 1, 2, ..., n$ (το δέλτα του Kronecker). Αποδείξτε ότι:

(ι) Η συνήθης βάση $\{e_1, ..., e_n\}$ του R^n είναι ορθοκανονική.

(ιι) Έστω $n = 4$ και $a_1 = \frac{1}{5}(3e_1 + 4e_3)$, $a_2 = \frac{1}{5}(4e_2 - 3e_4)$, $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{10}(-4e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 4e_4)$. Δείξτε ότι τα a_1, a_2, a_3 είναι ανά δύο ορθογώνια διανύσματα νόρμας 1. Βρείτε ένα διάνυσμα a_4 ώστε τα a_1, a_2, a_3, a_4, σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση του R^4