Η ταυτότητα του Lagrange

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 = \sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2,\ x_j, y_j \in R, n\ge 2.$$

[Η θέτοντας, $x=\left(x_1,...,x_n\right), y=\left(y_1,...,y_n\right)$ έχουμε

$$\|x\|^2\cdot\|y\|^2-\left(x\cdot y\right)^2=\sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2 \text{]}$$

Λύση Παρατηρούμε πρώτα ότι, $\sum_{\substack{1\le k,j\le n\\ k\ne j}} x_j y_k = 2\sum_{1\le j<k\le n} x_j y_k$ (1). Πραγματικά αριστερά το άθροισμα υπολογίζεται σε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη $\left\{\left(j,k\right): j\ne k, 1\le j,k\le n\right\}$ που είναι $n\left(n-1\right)=n^2-n$ το πλήθος και δεξιά σε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη $\left\{\left(j,k\right): 1\le j<k\le n\right\}$, δηλαδή όλους τους συνδυασμούς των n αριθμών $\left\{1,2,...,n\right\}$ ανά δύο, που είναι $\frac{n\left(n-1\right)}{2}$ το πλήθος.

Αποδεικνύουμε τώρα την ταυτότητα Lagrange με χρήση της (1). Ξεκινούμε από το δεξί μέλος:

$$\sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2 = \sum_{1\le j<k\le n} x_j^2 y_k^2 + \sum_{1\le j<k\le n} x_k^2 y_j^2 - 2\sum_{1\le j<k\le n} x_j y_k x_k y_j =$$

$$=\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j^2 y_k^2 - \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j y_j x_k y_k$$

Όσο για το αριστερό μέλος έχουμε:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 y_j^2 + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j^2 y_k^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 y_j^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n} x_j y_j x_k y_k\right) =$$

$$=\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j^2 y_k^2 - \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} x_j y_j x_k y_k$$

Έτσι η ταυτότητα Lagrange έπεται.

Παρατήρηση. Έπεται ιδιαίτερα από την (1) ότι:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n} a_j a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} a_j a_k$$

Εφαρμογές της ταυτότητας Lagrange και του εξωτερικού γινομένου.

1)Η ταυτότητα Lagrange έχει ως άμεση συνέπεια την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}, x_j, y_j \in R, n\ge 2$. Εφόσον το δεξί μέλος της ταυτότητας Lagrange είναι μη αρνητικό.

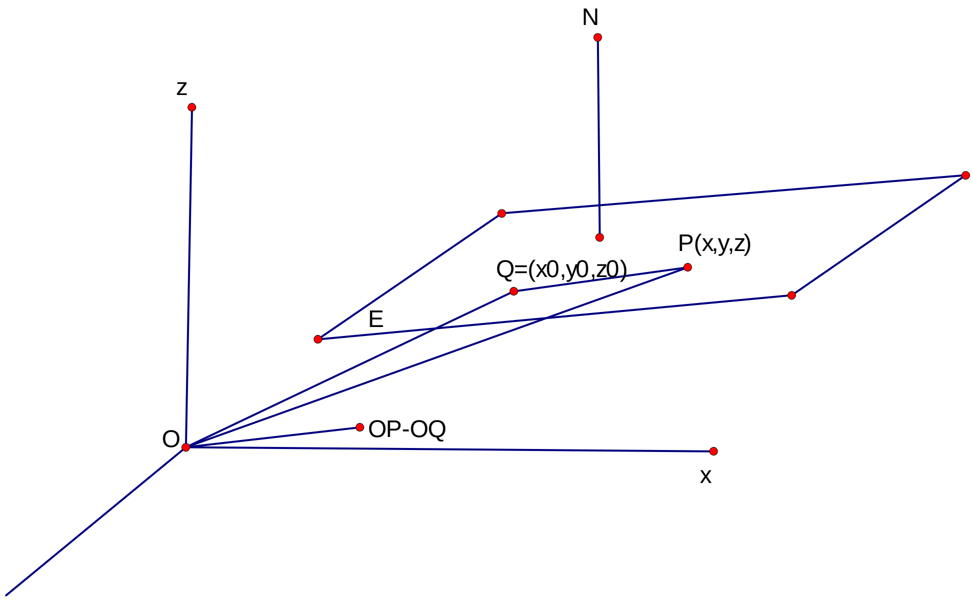
2) Πότε ισχύει ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwarz;
Από την ταυτότητα του Lagrange έπεται ότι ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει ακριβώς τότε αν η ποσότητα $\sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2$ στο δεξί μέλος της ταυτότητας Lagrange ισούται με μηδέν. Έτσι $\sum_{1\le j<k\le n}\left(x_j y_k - x_k y_j\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_j y_k = x_k y_j$ για κάθε j,k με $1\le j<k\le n$. Δηλαδή αν, $\det\begin{vmatrix} x_j x_k \\ y_j y_k \end{vmatrix} = 0$ (*) για κάθε $1\le j,k\le n,\ j\ne k$. Έπεται εύκολα ότι η (*) ισοδυναμεί με το ότι τα διανύσματα $x=\left(x_1,\dots,x_n\right)$ και $y=\left(y_1,\dots,y_n\right)$ είναι συγγραμμικά. (Αν τα x και y είναι συγγραμμικά δηλαδή αν $x=\lambda y$ για κάποιο $\lambda\in R$ τότε ισχύει εύκολα η (*)).
Αν ισχύει η (*) και τα x και y είναι μη μηδενικά τότε υπάρχει $j,k\in\{1,2,\dots,n\}: y_j\ne 0, x_k\ne 0$. Υποθέτοντας χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $k\ne j$ έχουμε, $\det\begin{vmatrix} x_k x_j \\ y_k y_j \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda\in R : x_j=\lambda y_j$ και άρα $x_\nu=\lambda y_\nu$ για κάθε $\nu=1,2,\dots,n$

3) Έστω $a=\left(a_1,\dots,a_n\right), b=\left(b_1,\dots,b_n\right)\in R^n$. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν Ε του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία $O,a,a+b$ και b ισούται με $\mathrm{E}=\sqrt{\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\left(a\cdot b\right)^2}=\sqrt{\sum_{1\le j<k\le n}\left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2}$.

Λύση Υποθέτουμε ότι τα a και b δεν είναι συγγραμμικά, διαφορετικά το παραλληλόγραμμο εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα και το δεξί και το αριστερό μέλος της ισότητας ισούται με μηδέν.
Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές τα $O,a,a+b$ και b ισούται με $\mathrm{E}=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin\theta$, όπου $\theta\in[0,\pi]$ η κυρτή γωνία των a και b (ο τύπος για το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισχύει και στον R^n με $n\ne 3$, εφόσον ο υπόχωρος $V=\langle a,b\rangle$ που παράγουν τα a και b είναι διάστασης 2, $\dim V=2$ και άρα γραμμικά ισομετρικός με τον $\left(R^2,\|\cdot\|\right)$).
Έτσι έχουμε:
$\mathrm{E}^2=\|a\|^2\cdot\|b\|^2\cdot\sin^2\theta=\|a\|^2\cdot\|b\|^2\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)=\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\|a\|^2\cdot\|b\|^2\cdot\cos^2\theta=$
$\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\left(a\cdot b\right)^2$ Εφόσον γνωρίζουμε ότι $a\cdot b=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\theta$.
Δηλαδή $\mathrm{E}^2=\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\left(a\cdot b\right)^2$ (1)
Από την ταυτότητα του Lagrange το δεξί μέλος της (1) ισούται με $\sum_{1\le j<k\le n}\left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2$. Έπεται ότι, $\mathrm{E}^2=\|a\|^2\cdot\|b\|^2-\left(a\cdot b\right)^2=\sum_{1\le j<k\le n}\left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2$ η οποία συνεπάγεται αμέσως την ζητούμενη ισότητα.

4)Η εξίσωση ενός επιπέδου στον R^3.

Μια εξίσωση για το επίπεδο Ε που είναι κάθετο στο δεδομένο διάνυσμα $\mathrm{N} = \mathrm{A}i + \mathrm{B}j + Ck$ του R^3 και περιέχει το σημείο $Q = (x_0, y_0, z_0)$ έχει τις ακόλουθες μορφές: $\mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ ή $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$ κανονική μορφή.



Πράγματι το σημείο $P = (x, y, z)$ ανήκει στο επίπεδο Ε αν και μόνο αν το διάνυσμα $OP - OQ = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ είναι παράλληλο προς το επίπεδο Ε αν και μόνο αν το Ν είναι ορθογώνιο στο $P - Q$. Έτσι βρίσκουμε:

$$OP - OQ \perp N \Leftrightarrow \mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$$

Όπου $D = -(\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + Cz_0)$.

Αντίστροφα ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο με εξίσωση $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$ είναι το $N = \mathrm{A}i + \mathrm{B}j + Ck$, όπου $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| + |C| > 0$. Σημειώνουμε ότι τα επίπεδα με εξισώσεις: $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$ και $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz = 0$ είναι παράλληλα (αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα των εξισώσεων $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz = 0$ και $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$ προφανώς δεν έχει λύση).

5) Η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τρία δοσμένα σημεία.

Έστω $\mathrm{P} = (x_1, y_1, z_1), Q = (x_2, y_2, z_2), R = (x_3, y_3, z_3)$ σημεία του R^3 για τα οποία υποθέτουμε ότι δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Μπορούμε να βρούμε την κανονική μορφή του επιπέδου που περιέχει τα P, Q, R με δύο τρόπους:

(Ι) Η εξίσωση που θέλουμε έχει την κανονική μορφή $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + Cz + D = 0$. Επειδή τα P, Q, R ανήκουν στο επίπεδο καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} \mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + Cz_1 + D = 0 \\ \mathrm{A}x_2 + \mathrm{B}y_2 + Cz_2 + D = 0 \\ \mathrm{A}x_3 + \mathrm{B}y_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$$

(το οποίο και επιλύουμε ως προς τα A, B και C).

(ΙΙ) Τα διανύσματα $OQ - O\mathrm{P}$ και $OR - OP$ είναι παράλληλα προς το επίπεδο Ε που ζητούμε άρα κάθε διάνυσμα ορθογώνιο προς το Ε είναι και ορθογώνιο προς αυτά. Το εξωτερικό γινόμενο $\mathrm{N} = (OQ - OP) \times (OR - OP)$ είναι ορθογώνιο προς τα $OQ - O\mathrm{P}$ και $OR - OP$.

Παρατηρούμε ότι, $OQ - OP = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$OR - OP = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ και συνεπώς,

$$\mathrm{N} = (OQ - OP) \times (OR - OP) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} k = \mathrm{A}i + \mathrm{B}j + Ck .$$

Έχοντας το διάνυσμα Ν που είναι κάθετο στο Ε μπορούμε να βρούμε την κανονική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου χρησιμοποιώντας ένα από τα δοσμένα σημεία P, Q, R π.χ. το Ρ.

Έτσι βρίσκουμε την εξίσωση $\mathrm{A}(x - x_1) + \mathrm{B}(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ όπου A, B και C είναι οι συντεταγμένες του Ν.