Συνεκτικά σύνολα

Έστω, $\mathrm{I} \subseteq R$ διάστημα και $f : \mathrm{I} \to R$ συνεχής, τότε η f έχει την ιδιότητα της ενδιαμέσου τιμής, δηλαδή, η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαφορετικών τιμών της, συνεπώς το $f(\mathrm{I})$ είναι διάστημα. Είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των ανοικτών ή κλειστών διαστημάτων στο R ότι δεν μπορούν να γραφούν ως ένωση δύο ξένων ανοικτών ή κλειστών υποδιαστημάτων αντίστοιχα. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται στον R^n και επιτρέπει να αποδείξουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών..

3.15 Ορισμός. Ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$ λέγεται συνεκτικό αν δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ξένων μη κενών ανοικτών στο Α υποσυνόλων. Με άλλα λόγια ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$ δεν είναι συνεκτικό αν υπάρχουν $U, V \subseteq R^n$ ανοικτά ώστε, $\mathrm{A} \cap U \neq \varnothing, \mathrm{A} \cap V \neq \varnothing, (\mathrm{A} \cap U) \cap (\mathrm{A} \cap V) = \varnothing$ και $(\mathrm{A} \cap U) \cup (\mathrm{A} \cap V) = \mathrm{A}$.

Προφανώς τα μονοσύνολα του R^n είναι συνεκτικά σύνολα.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα που χαρακτηρίζει τα συνεκτικά υποσύνολα του R.

.

3.16 Θεώρημα (Συνεκτικότητα των διαστημάτων). Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του R με περισσότερα από ένα στοιχεία είναι τα διαστήματα. (ανοικτά, κλειστά ,ημιανοικτά φραγμένα ή μη φραγμένα).

Απόδειξη: Παραλείπεται.

Υπενθύμιση. Αν Χ σύνολο και $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου Α είναι η συνάρτηση $x_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \to R : x_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathrm{A} \\ 0, x \notin \mathrm{A} \end{cases}$.

3.17 Λήμμα. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι για ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$.

(ι) Το Α δεν είναι συνεκτικό.

(ιι) Υπάρχει $f : \mathrm{A} \to R$ συνεχής ώστε $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$.

Απόδειξη: (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Το Α γράφεται ως $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap U) \cup (\mathrm{A} \cap V)$ όπου U, V ανοικτά στο R^n με $\mathrm{A} \cap U \neq \varnothing$ $\mathrm{A} \cap V \neq \varnothing$ και $(\mathrm{A} \cap U) \cap (\mathrm{A} \cap V) = \varnothing$. Θέτουμε $f = x_{\mathrm{A} \cap U}$ και παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής με $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$.

(η f αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του R σε σχετικά ανοικτά υποσύνολα του Α).

(ιι) $\Rightarrow$(ι) Τα σύνολα $\mathrm{A}_0 = f^{-1}(\{0\})$ και $\mathrm{A}_1 = f^{-1}(\{1\})$ είναι σχετικά ανοικτά υποσύνολα του Α σε τρόπο ώστε $\mathrm{A}_0 \cup \mathrm{A}_1 = \mathrm{A}, \mathrm{A}_0 \neq \varnothing, \mathrm{A}_1 \neq \varnothing$ και $\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A}_1 = \varnothing$. Έστω $U, V \subseteq R^n$ ανοικτά ώστε $\mathrm{A}_0 = U \cap \mathrm{A}$ και $\mathrm{A}_1 = V \cap \mathrm{A}$. Επομένως το Α δεν είναι συνεκτικό.

3.18 Πρόταση Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ συνεκτικό και $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνεχής τότε το $f(\mathrm{A})$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^m.

Απόδειξη: Αν το $f(\mathrm{A})$ δεν ήταν συνεκτικό τότε θα υπήρχε μια συνεχής συνάρτηση, $g : f(\mathrm{A}) \to \{0,1\} \subseteq R$ με $g(f(\mathrm{A})) = \{0,1\}$. Τότε η συνάρτηση $gof : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R$ θα ήταν συνεχής και $(gof)(\mathrm{A}) = \{0,1\}$. Επομένως το Α δεν θα ήταν συνεκτικό, άτοπο.

Η έννοια της συνεκτικότητας οδηγεί στην ακόλουθη γενίκευση του θεωρήματος ενδιαμέσου τιμής του Λογισμού μιας μεταβλητής.

3.19 Θεώρημα (Ενδιαμέσου Τιμής) Έστω $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R$ συνεχής. Αν το Α είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^n τότε το $f(\mathrm{A})$ είναι διάστημα του R, δηλαδή η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών της.

Απόδειξη: Έπεται προφανώς από το προηγούμενο αποτέλεσμα και τον χαρακτηρισμό των συνεκτικών υποσυνόλων του R.

3.20 Λήμμα. Έστω $\{\mathrm{A}_i : i \in I\}$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του R^n ώστε $\bigcap_{i \in I} \mathrm{A}_i \neq \varnothing$, τότε η ένωση $\mathrm{A} = \bigcup_{i \in I} \mathrm{A}_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^n. Επίσης η κλειστότητα ενός συνεκτικού συνόλου είναι σύνολο συνεκτικό.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $f : \mathrm{A} \to R$ συνεχής με $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$. Έστω $x \in \bigcap_{i \in I} \mathrm{A}_i$, υποθέτουμε ότι $f(x) = 1$. Επειδή το κάθε A_i είναι συνεκτικό και $x \in \mathrm{A}_i$, έπεται ότι $f(y) = f(x) = 1$ για κάθε $y \in \mathrm{A}_i$ και για κάθε $i \in I$. Συνεπώς η f δεν μπορεί να παίρνει την τιμή 0. (Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι αν $f(x) = 0$ τότε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \mathrm{A} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο και άρα το Α είναι συνεκτικό.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι αν $f : \overline{\mathrm{A}} \to R$ συνεχής (όπου $\mathrm{A} \subseteq R^n$ συνεκτικό) με $f(\overline{\mathrm{A}}) \subseteq \{0,1\}$, τότε η συνέχεια της f έπεται ότι αυτή δεν μπορεί να είναι επί του $\{0,1\}$. Πράγματι αν υπήρχαν $x_1, x_0 \in \overline{\mathrm{A}}$ με $f(x_1) = 1$ και $f(x_0) = 0$ τότε θα υπήρχαν ακολουθίες (x_n) και (y_n) στοιχείων του Α ώστε $x_n \to x_1$ και $y_n \to x_0$. Συνεπώς $f(x_n) \to f(x_1) = 1$ και $f(y_n) \to f(x_0) = 0$. Επειδή $(f(x_n))$ και $(f(y_n))$ είναι ακολουθίες στοιχείων του $\{0,1\}$ έπεται ότι $f(x_n) = 1$ και $f(y_n) = 0$ για κάθε $n \geq N_0$ για κάποιο $N_0 \in N$. Συνεπώς $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$, άτοπο.

(*) 3.21 Ορισμός Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$ και $x \in \mathrm{A}$. Η συνεκτική συνιστώσα A_x του x στο Α είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του Α που περιέχουν το x.

Χρησιμοποιώντας τα δύο Λήμματα που αποδείξαμε παραπάνω (3.17 και 3.20) αποδεικνύεται εύκολα (αφήνεται ως άσκηση) η ακόλουθη.

(*) 3.22. Πρόταση. Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$ και $x \in \mathrm{A}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(ι) Η συνεκτική συνιστώσα A_x του x στο A είναι συνεκτικό σύνολο και είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο του A. (Αν $\mathrm{A}_x \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ και B συνεκτικό τότε $\mathrm{A}_x = \mathrm{B}$).

(ιι) Η συνεκτική συνιστώσα A_x του x στο A είναι σύνολο κλειστό στο A.

(ιιι) Το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών των σημείων του A συνιστά μια διαμέριση του A, δηλαδή, κάθε δύο διαφορετικές συνιστώσες του A είναι ξένες και η ένωσή τους ισούται με το A.

(ιν) Μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to R$ είναι σταθερή πάνω σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του A.

Παρατήρηση. Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός συνόλου A δεν είναι απαραίτητα σύνολα ανοικτά στο A. Για παράδειγμα οι συνεκτικές συνιστώσες των σημείων του Q είναι μονοσύνολα. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το σύνολο $\mathrm{A} = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \bigcup \{0\} \subseteq R$. Οι συνεκτικές συνιστώσες του A είναι οι:

το $\{1\}, \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{1}{n} \right\}, \ldots$ και το $\{0\}$, παρατηρούμε ότι το $\{0\}$ δεν είναι ανοικτό σχετικά με το A.

Από την άλλη μεριά αποδεικνύεται ότι οι συνεκτικές συνιστώσες ενός ανοικτού συνόλου $U \subseteq R^n$ είναι σύνολα ανοικτά στον R^n.

3.23 Ορισμός: (ι) Έστω, $a, b \in R^n$ το (προσανατολισμένο) ευθύγραμμο τμήμα από το a στο b είναι το σύνολο $[a,b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\} \subseteq R^n$.

(ιι) Έστω, $a_1, \ldots, a_m$ σημεία του R^n. Η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα $a_1, \ldots, a_m$ είναι το σύνολο, $\mathrm{P} = [a_1, a_2] \bigcup [a_2, a_3] \bigcup \ldots \bigcup [a_{m-1}, a_m]$.

(ιιι) Ένα υποσύνολο $\mathrm{K} \subseteq R^n$ λέγεται κυρτό αν για κάθε $a, b \in \mathrm{K}$ ισχύει ότι $[a,b] \subseteq \mathrm{K}$.

Παρατηρούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[a,b] \subseteq R^n$ είναι κυρτό υποσύνολο του R^n

3.24 Πρόταση: (ι) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα και γενικότερα κάθε πολυγωνική γραμμή στον R^n είναι σύνολα συνεκτικά.

(ιι) Κάθε κυρτό σύνολο στον R^n είναι σύνολο συνεκτικό.

Απόδειξη: (ι) Έστω, $a, b \in R^n$, τότε η απεικόνιση $\varphi : [0,1] \to [a,b] \subseteq R^n : \varphi(t) = (1-t)a + tb, t \in [0,1]$ είναι συνεχής και $\varphi([0,1]) = [a,b]$. Επομένως το $[a,b]$ είναι συνεκτικό.

Το γεγονός ότι μια πολυγωνική γραμμή P με m - κορυφές είναι σύνολο συνεκτικό αποδεικνύεται με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών της (για m=2 η P είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στον R^n και άρα σύνολο συνεκτικό). Για το επόμενο βήμα της επαγωγής χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.20.

(ιι) Έστω Κ κυρτό και $a \in$ Κ . Επειδή το Κ είναι κυρτό ισχύει ότι $[a,x] \subseteq$ Κ για κάθε $x \in$ Κ , επομένως Κ $= \bigcup \{[a,x] : x \in$ Κ$\}$. Από το Λήμμα 3.20 έπεται το συμπέρασμα.

Παραδείγματα κυρτών συνόλων: 1) Κάθε ανοικτή ή κλειστή σφαίρα στον R^n είναι σύνολο κυρτό. Η απόδειξη είναι απλή (και διαισθητικά προφανής αν $n = 2$ ή 3).
2)Κάθε ημιεπίπεδο (ανοικτό ή κλειστό) είναι κυρτό σύνολο στον R^2.
3) Το εσωτερικό ενός τριγώνου ή ενός παραλληλογράμμου είναι σύνολο κυρτό στον R^2. Βέβαια και κάθε κλειστό τρίγωνο ή παραλληλόγραμμο (το εσωτερικό μαζί με το σύνορο) είναι κυρτό σύνολο.

Αποδεικνύεται ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των ανοικτών και συνεκτικών υποσυνόλων του R^n.

3.25 Θεώρημα. Έστω, $U \subseteq R^n$ ανοικτό σύνολο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(ι) Το U είναι συνεκτικό.
(ιι) Για κάθε $a,b \in U$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $\mathrm{P} \subseteq U$ από το a στο b (το U είναι όπως λέμε πολυγωνικά συνεκτικό).
Απόδειξη: Παραλείπεται.
Ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^n θα ονομάζεται και <u>τόπος.</u>

Παραδείγματα: Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα ακόλουθα ανοικτά σύνολα είναι συνεκτικά:
1)Αν $F \subseteq R^n$ είναι πεπερασμένο σύνολο τότε το $R^n - F$ καθώς και το $\mathrm{B}(x,\varepsilon) - F$ είναι συνεκτικά σύνολα. (όπου $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$ και $n \geq 2$).
2)Αν $x \in R^n$ και $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ τότε ο δακτύλιος $\mathrm{B}(x,\varepsilon_2) - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon_1)$ είναι σύνολο συνεκτικό.
3)Αν οι ανοικτές σφαίρες $\mathrm{B}(x_2,\varepsilon_2), \mathrm{B}(x_1,\varepsilon_1)$ τέμνονται τότε η ένωση τους είναι σύνολο συνεκτικό.
Η απόδειξη των (1), (2), (3) αφήνεται ως άσκηση.
Καθόσον αφορά τις συνεκτικές συνιστώσες ενός ανοικτού συνόλου του R^n αποδεικνύεται εύκολα το ακόλουθο.

(*) **3.26Θεώρημα**. Έστω U ανοικτό σύνολο στον R^n.
Τότε ισχύουν:
(ι) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του U είναι σύνολο ανοικτό στον R^n.
(ιι) Το U έχει αριθμήσιμο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών.

Η απόδειξη του (ι) ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση. Για τον (ιι) ισχυρισμό χρησιμοποιούμε τον πρώτο ισχυρισμό καθώς και το γεγονός ότι ο R^n περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο, π.χ. το σύνολο Q^n (Q =το σύνολο των ρητών στο R).
Ένα υποσύνολο Α του R^n λέγεται ότι είναι πυκνό στον R^n αν, $\overline{\mathrm{A}} = R^n$.

<u>Σημείωση</u>: Για την απόδειξη των θεωρημάτων 3.16 και 3.25 καθώς και για πληρέστερη ενημέρωση επί της συνεκτικότητας παραπέμπουμε στην Βιβλιογραφία.