Συμπάγεια και ομοιόμορφη συνέχεια

Μια πολύ σημαντική έννοια στην Ανάλυση είναι αυτή της συμπάγειας . Όπως θα δούμε τα συμπαγή υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου R^n συμπεριφέρονται λίγο πολύ ως πεπερασμένα σύνολα.

3.8. Ορισμός Έστω $\mathrm{K} \subseteq R^n$.

(ι) Το Κ λέγεται συμπαγές αν κάθε ακολουθία $(x_k) \subseteq \mathrm{K}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο Κ.

(ιι) Το Κ λέγεται φραγμένο αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0 : \|x\| \leq \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{K}$.

Πρέπει να είναι σαφές ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του R^n είναι συμπαγές. (Δώστε τις λεπτομέρειες.)

3.9 Θεώρημα. Έστω $\mathrm{K} \subseteq R^n$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(ι) Το Κ είναι συμπαγές.

(ιι) Το Κ είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη. (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω $(x_k) \subseteq \mathrm{K}$ ώστε $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Η (x_k) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο Κ και συνεπώς $x \in \mathrm{K}$. Άρα το Κ είναι κλειστό.
Ας υποθέσουμε ότι το Κ δεν είναι φραγμένο. Τότε μπορούμε επαγωγικά να επιλέξουμε μια ακολουθία $(y_k) \subseteq \mathrm{K}$ ώστε $\|y_k\| \geq k$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ Είναι τώρα σαφές ότι η (y_k) δεν μπορεί να έχει υπακολουθία συγκλίνουσα, άτοπο.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Έστω, (x_k) τυχούσα ακολουθία σημείων του Κ. Επειδή το Κ είναι φραγμένο η (x_k) είναι και αυτή φραγμένη, συνεπώς από το θεώρημα Bolzano έχει μια υπακολουθία $\left(x_{k_m}\right)_{m\geq 1}$ η οποία συγκλίνει έστω $x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x \in R^n$. Επειδή το Κ είναι κλειστό έπεται ότι $x \in \mathrm{K}$. Άρα το Κ είναι συμπαγές.

3.10. Πρόταση. Έστω, $\mathrm{K} \subseteq R^n$ και $f : \mathrm{K} \to R^m$ συνεχής. Τότε το $f(\mathrm{K})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του R^m.(Έπεται ιδιαίτερα ότι η f είναι φραγμένη συνάρτηση.)

Απόδειξη Έστω $(y_k) \subseteq f(\mathrm{K})$ τυχούσα ακολουθία. Επιλέγουμε $(x_k) \subseteq \mathrm{K} : f(x_k) = y_k$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$. Επειδή το Κ είναι συμπαγές η (x_k) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία έστω $x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Από την συνέχεια της f έπεται ότι $y_{k_m} = f\left(x_{k_m}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x) \in f(\mathrm{K})$.

Στο επόμενο Λήμμα φαίνεται και η συμπεριφορά ενός συμπαγούς συνόλου ως πεπερασμένο.

3.11 Λήμμα Αν Κ είναι συμπαγές και μη κενό υποσύνολο του $R\ (n=1)$, τότε το Κ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη: Το Κ είναι φραγμένο σύνολο αφού είναι συμπαγές. Έστω $m = \inf \mathrm{K}$ και $\mathrm{M} = \sup \mathrm{K}$. Οι αριθμοί m και M είναι σημεία επαφής του Κ (γιατί;), δηλαδή $m, \mathrm{M} \in \overline{\mathrm{K}} = \mathrm{K}$, αφού το Κ είναι κλειστό. Έπεται αμέσως ότι τα m και M είναι το ελάχιστο και το μέγιστο στοιχείο του Κ αντίστοιχα.

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο είναι μια σπουδαία αρχή για την Μαθηματική Ανάλυση, έπεται τώρα αμέσως από τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα (την πρόταση 3.10 και το Λήμμα 3.11).

3.12 Θεώρημα Έστω $\mathrm{K} \subseteq R^n$ συμπαγές και $f : \mathrm{K} \to R$ συνεχής (πραγματική) συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν σημεία $p, q \in \mathrm{K}$ ώστε $f(p) \le f(x) \le f(q)$ για κάθε $x \in \mathrm{K}$.

Απόδειξη: Η εικόνα $f(\mathrm{K}) \subseteq R$ του K είναι συμπαγές υποσύνολο του R από την πρόταση 3.10. Από το Λήμμα 3.11 έπεται ότι το $f(\mathrm{K})$ έχει μέγιστο M και ελάχιστο στοιχείο m. Έστω $p, q \in \mathrm{K}$ ώστε $f(p) = m$ και $f(q) = \mathrm{M}$, τότε $f(p) \le f(x) \le f(q)$ για κάθε $x \in \mathrm{K}$.

Παρατήρηση: Κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές. (Γιατί;)

Παραδείγματα συμπαγών συνόλων

1)Κάθε <u>κλειστή σφαίρα</u> $\widehat{\mathrm{B}}(x,\varepsilon) = \{ y \in R^n : \|x - y\| \le \varepsilon \}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του R^n, αφού είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο.

2)Η επιφάνεια $S(x,\varepsilon)$ της σφαίρας $\widehat{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ είναι συμπαγές σύνολο (γιατί;).

3)Κάθε <u>κλειστό ορθογώνιο</u> $\Pi = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ του R^n είναι ομοίως κλειστό και φραγμένο σύνολο του R^n και άρα συμπαγές. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Ιδιαίτερα ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ του R είναι συμπαγές σύνολο.

4)Αν (x_k) είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον R^n έστω $x_k \to x$ τότε το σύνολο $\mathrm{K} = \{x_1, ..., x_k, ...\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές. Πράγματι, το σύνολο K είναι βέβαια φραγμένο και εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο $U = R^n - \mathrm{K}$ είναι ανοικτό, συνεπώς, το K είναι κλειστό. Έπεται αμέσως ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο άρα συμπαγές.

5) O R^n δεν είναι συμπαγής χώρος (γιατί;).

Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας, η οποία είναι ισχυρότερη από αυτήν της συνέχειας θα μας χρειασθεί όταν μελετήσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Ας θεωρήσουμε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$, τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $a \in \mathrm{A}$ υπάρχει $\delta(\varepsilon, a) > 0 : x \in \mathrm{A}$ και $\|x - a\| \le \delta$ τότε $\|f(x) - f(a)\| \le \varepsilon$.

Η f θα λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν ο θετικός αριθμός $\delta(\varepsilon, a) > 0$ εξαρτάται <u>μόνο</u> από το ε. Με περισσότερη ακρίβεια, μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ θα λέγεται <u>ομοιόμορφα συνεχής</u>, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε, $x, y \in \mathrm{A}$ και $\|x - y\| \le \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \le \varepsilon$.

Παραδείγματα. 1) Κάθε συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ η οποία είναι Lipschitz, δηλαδή υπάρχει $\mathrm{K} > 0 : \|f(x) - f(y)\| \le \mathrm{K}\|x - y\|$ για κάθε $x, y \in \mathrm{A}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, δοθέντος του $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{K}}$ και ελέγχουμε ότι αν $\|x - y\| \le \delta = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{K}}$

(με $x, y \in \mathrm{A}$) τότε $\|f(x) - f(y)\| \le \mathrm{K}\|x - y\| \le \mathrm{K}\cdot\delta = \mathrm{K}\cdot\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{K}} = \varepsilon$.

Έπεται ιδιαίτερα ότι κάθε **γραμμική** συνάρτηση $f : R^n \to R^m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2) Η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to R : f(x) = \sqrt{x}, x \ge 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής (χρησιμοποιήστε την ανισότητα, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \le \sqrt{|x - y|}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$), αλλά <u>δεν</u> είναι Lipschitz.

Ας εξακριβώσουμε τον τελευταίο ισχυρισμό. Έστω ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz με σταθερά $\mathrm{K} > 0$, δηλαδή $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \le \mathrm{K}|x - y|$ για κάθε $x, y \ge 0$. Τότε θα είχαμε ότι (με $y = 0$) $\sqrt{x} \le \mathrm{K}x$ για κάθε $x \ge 0$ ή $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \le \mathrm{K}$ για κάθε $x > 0$, άτοπο.

3) Η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in R$ είναι βέβαια συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν δ είναι τυχών θετικός αριθμός τότε η ποσότητα $(x + \delta)^2 - x^2 = 2x\delta + \delta^2$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλη, (αφού $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2x\delta + \delta^2\right) = +\infty$) και συγχρόνως $\left|(x + \delta) - x\right| = \delta$.

Η ομοιόμορφη συνέχεια μιας συνάρτησης χαρακτηρίζεται με χρήση ακολουθιών με τον ακόλουθο τρόπο.

3.13 Θεώρημα. Έστω, $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνάρτηση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (ι) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ιι) Για κάθε ζεύγος ακολουθιών (x_k) και (y_k) από το Α με $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ ισχύει ότι $\|f(x_k) - f(y_k)\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Απόδειξη: (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω $(x_k), (y_k) \subseteq \mathrm{A}$ με $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ και ακόμη έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τότε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε $x, y \in \mathrm{A}$ και $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ (1)

Αλλά αφού $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ υπάρχει $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\delta) \in N$ ώστε $k \ge \mathrm{K} \Rightarrow \|x_k - y_k\| \le \delta$ (2). Από τις (1) και (2) συνάγομε ότι $k \ge \mathrm{K} \Rightarrow \|f(x_k) - f(y_k)\| \le \varepsilon$ και άρα $\|f(x_k) - f(y_k)\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Αν η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν σημεία $x(\delta)$ και $y(\delta)$ του Α με $\|x(\delta) - y(\delta)\| \le \delta$ και $\|f(x(\delta)) - f(y(\delta))\| \ge \varepsilon_0$ (3). Εφαρμόζοντας την (3) για $\delta = \dfrac{1}{k}, k \in N$ βρίσκουμε σημεία $x_k, y_k \in \mathrm{A}$ με $\|x_k - y_k\| \le \frac{1}{k}$ και συγχρόνως $\|f(x_k) - f(y_k)\| \ge \varepsilon_0$. Αλλά τότε $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ και $\|f(x_k) - f(y_k)\|$ δεν συγκλίνει στο 0, που αντιφάσκει στην υπόθεσή μας. Συνεπώς ο ισχυρισμός μας είναι σωστός.

Παραδείγματα: 1) Η συνάρτηση $f(x,y) = xy$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω, $(x_k, y_k) = (k,k)$ και $(x_k^{'}, y_k^{'}) = \left(k + \frac{1}{k}, k + \frac{1}{k}\right), k \ge 1$. Τότε $\left\|(x_k, y_k) - (x_k^{'}, y_k^{'})\right\|^2 = \left\|\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\|^2 = \frac{2}{k^2} \to 0 \Leftrightarrow \left\|(x_k, y_k) - (x_k^{'}, y_k^{'})\right\| \to 0$. Όμως $\left|f(x_k, y_k) - f(x_k^{'}, y_k^{'})\right| = \left|k^2 - \left(k + \frac{1}{k}\right)^2\right| = 2 + \frac{1}{k^2}$ δεν συγκλίνει στο 0.

2)Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0,1]$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω, $x_k = \frac{1}{k}$ και $y_k = \frac{1}{k+1}, k \ge 1$. Τότε έχουμε $|x_k - y_k| = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \to 0$, όμως $|f(x_k) - f(y_k)| = k + 1 - k = 1$ για κάθε $k \ge 1$.

Το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα συνδέει την συμπάγεια και την ομοιόμορφη συνέχεια.

3.14 Θεώρημα Έστω, $\mathrm{K} \subseteq R^n$ συμπαγές και $f : \mathrm{K} \to R^m$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Έστω, ότι υπάρχει ένα ζεύγος ακολουθιών $(x_k), (y_k)$ του Κ ώστε, $\|x_k - y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ ενώ η $\|f(x_k) - f(y_k)\|$, $k \ge 1$ δεν συγκλίνει στο 0.

Επειδή η ακολουθία μη αρνητικών αριθμών $\|f(x_k) - f(y_k)\|, k \ge 1$, <u>δεν </u>είναι μηδενική έχει μια υπακολουθία η οποία θα έχει ένα θετικό κάτω φράγμα, έστω χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι η ίδια ακολουθία έχει αυτή την ιδιότητα, δηλαδή υπάρχει $c > 0 : \|f(x_k) - f(y_k)\| \ge c$ για κάθε $k \ge 1$.

Επειδή το Κ είναι συμπαγές η (x_k) (ή η (y_k)) θα έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Από το γεγονός ότι $\|x_{k_m} - y_{k_m}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ έπεται αμέσως ότι $y_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Έπεται τώρα από την συνέχεια της f ότι $f(x_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x)$ και $f(y_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x)$ συνεπώς $\|f(x_{k_m}) - f(y_{k_m})\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ και η τελευταία σχέση αντιφάσκει με την $\|f(x_k) - f(y_k)\| \ge c$ για κάθε $k \ge 1$.

Ασκήσεις

1) Αποδείξτε με χρήση του χαρακτηρισμού της ομοιόμορφης συνέχειας με ακολουθίες ότι οι συναρτήσεις: (α) $f(x) = x^2, x \ge 0$, (β) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, (γ)

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z$ και (δ) $f(x)=\dfrac{x}{\|x\|}$, $x\in R^n$, $x\neq 0$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς,

2)Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις, (α) $f(x)=\log x, x\in[c,+\infty)$ όπου $c>0$, (β) $f(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$, και (γ) $f(x)=\left(|a_1x_1+...+a_nx_n|\right)^{\frac{1}{2}}$, $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ και $a_1,...,a_n$ πραγματικές σταθερές, είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

3) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $(x,y)\in R^2\to\max(x,y)$ και $(x,y)\in R^2\to\min(x,y)$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

4) Αποδείξτε ότι αν K είναι φραγμένο και μη κενό υποσύνολο του R^n τότε η κλειστότητα $\overline{\mathrm{K}}$ του K είναι συμπαγές σύνολο.

5) Έστω $\mathrm{K}_1\supseteq\mathrm{K}_2\supseteq....\supseteq\mathrm{K}_n\supseteq...$, φθίνουσα ακολουθία συμπαγών μη κενών υποσυνόλων του R^n,αποδείξτε ότι η $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{K}_n$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του R^n.

6) Έστω A κλειστό μη κενό υποσύνολο του R^n και $a\in R^n$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\|x-a\|, x\in R^n$, έχει ελάχιστη τιμή επί του A. Δηλαδή υπάρχει $x_1\in\mathrm{A}:\|x-x_0\|\geq\|x_1-x_0\|$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$. [Υπόδειξη. Έστω $m=\inf\{\|x-a\|:x\in\mathrm{A}\}$. Αν $\varepsilon>0$, το σύνολο $\{x\in\mathrm{A}:\|x-a\|\leq m+\varepsilon\}$ είναι κλειστό και φραγμένο]

7)Έστω $f:\overline{\mathrm{B}}(0,\mathrm{M})\to R$ συνεχής συνάρτηση (όπου $\overline{\mathrm{B}}(0,\mathrm{M})=\{x\in R^n:\|x\|\leq\mathrm{M}\}$). Θέτομε $g(r)=\sup\{|f(x)|:\|x\|\leq r\}, 0\leq r\leq\mathrm{M}$. Τότε η g είναι συνεχής συνάρτηση του $r\in[0,\mathrm{M}]$.

[Υπόδειξη. Η g είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,\mathrm{M}]$ και συνεπώς τα πλευρικά όρια $g(r+0)=\lim\limits_{\substack{\rho\to r\\ \rho>r}}g(\rho)$ και $g(r-0)=\lim\limits_{\substack{\rho\to r\\ \rho<r}}g(\rho)$ υπάρχουν και ισχύει $g(r+0)\leq g(r)\leq g(r-0)$. Αποδείξτε ότι $g(r)=g(r+0)=g(r-0)$.]