Όρια συναρτήσεων

2.15. Ορισμός. Έστω, $f:\mathrm{A}\subseteq R^n \to R^m$ συνάρτηση $a\in R^n$ σημείο συσσώρευσης του Α και $b\in R^m$. Λέμε ότι η f έχει ως όριο το διάνυσμα b καθώς το x τείνει προς το a και συμβολίζουμε $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ή $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0: x\in\mathrm{A}$ και $0<\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-b\|<\varepsilon$.

<u>Ισοδύναμα:</u> Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0: x\in\mathrm{A}-\{a\}$ και $x\in\mathrm{B}(a,\delta)\Rightarrow f(x)\in\mathrm{B}(b,\varepsilon)$

[ή ακόμη, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0: f\left(\mathrm{B}(a,\delta)\cap\mathrm{A}-\{a\}\right)\subseteq\mathrm{B}(b,\varepsilon)$]

<u>Σημειώνουμε ότι</u>: 1) Ο αριθμός δ <u>εξαρτάται</u> από το ε και το σημείο a.
2) Το όριο αν υπάρχει είναι <u>μοναδικό</u> (εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας).
3)Για μια πραγματική συνάρτηση $f:\mathrm{A}\subseteq R^n\to R$, τα όρια $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ορίζονται αναλόγως. Η διατύπωση αυτών των ορισμών αφήνεται ως άσκηση.

Παραδείγματα: 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}=0$

Λύση Έστω, $\varepsilon>0$. Τότε για $\delta=\varepsilon$ και για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$ με $\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$ έχουμε

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\|(x,y)\|=0$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}=+\infty$ (και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)=0$)

Λύση. Έστω, $\varepsilon>0$. Τότε για $0<\delta\le\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, έχουμε αν $(x,y)\neq(0,0)$,

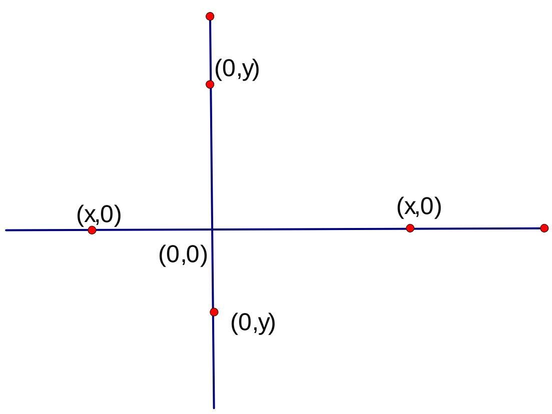
$\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta\le\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ τότε $\frac{1}{x^2+y^2}>\varepsilon$, άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}=+\infty$.

Έπεται ιδιαίτερα ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)=0$.

3) Το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ <u>δεν</u> υπάρχει.

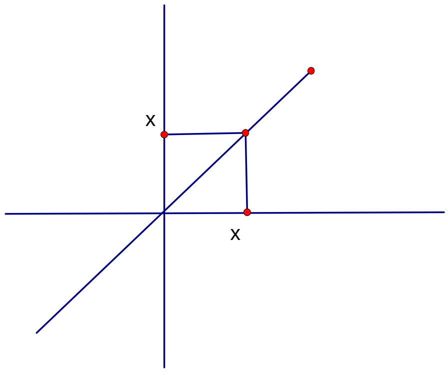
Λύση Προσεγγίζουμε πρώτα το $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα $y'y$, δηλαδή αν $x=0$ και $y\neq0$. Έστω

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),$$



τότε: $f(0,y)=\dfrac{0\cdot y}{0^2+y^2}=0$ και συνεπώς $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y)=0$.

Αναλόγως αν προσεγγίσουμε το $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα $x'x$ ($y=0$ και $x\neq 0$) βρίσκουμε $f(x,0)=\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=0$, δηλαδή $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0)=0$



Όμως αν προσεγγίσουμε το $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=x$ βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Έπεται ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

4) Το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$ δεν υπάρχει.

Λύση. Η $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ είναι ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U=R^2-\{(x,x):x\in R\}$, του οποίου το σύνορο είναι η ευθεία $y=x$, δηλαδή το σύνολο $\{(x,x):x\in R\}$. Έστω, $a\in R$ με $a\neq 1$. Προσεγγίζουμε το $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=ax$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x,ax)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+ax}{x-ax}=\dfrac{1+a}{1-a}$

Επειδή $\dfrac{1+a}{1-a}\neq\dfrac{1+\beta}{1-\beta}$ για $a,\beta\in R$ με $a\neq 1,\beta\neq 1$ και $a\neq\beta$ έπεται ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$, δεν υπάρχει.

(Μπορούμε να περιορισθούμε και στις ευθείες $\{(x,0):x\in R\},\{(0,y):y\in R\}$ για να διαπιστώσουμε την μη ύπαρξη του ορίου.)

Παρατηρούμε ότι η f περιορισμένη σε κάθε ευθεία $L_a=\{(x,ax):x\in R\}$ με $a\neq 1, a\in R$ και θέτοντας $f(0,0)=\dfrac{1+a}{1-a}$ γίνεται συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής, παρόλα αυτά το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

2.16. Θεώρημα. (Χαρακτηρισμός των ορίων συναρτήσεων με ακολουθίες).
Έστω, $f:\mathrm{A}\subseteq R^n\to R^m$ συνάρτηση, $a\in R^n$ σ.σ. του Α και $b\in R^m$.
Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(ι) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

(ιι) Για κάθε ακολουθία $(x_n)\subseteq\mathrm{A}$ με $x_n\neq a$, για κάθε $n\geq 1$ και $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}a\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}b$

Απόδειξη. (ι)$\Rightarrow$(ιι) Έστω $\varepsilon>0$ τότε από την υπόθεσή μας υπάρχει $\delta>0: x\in\mathrm{A}$ και $0<\|x-a\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-b\|<\varepsilon$ (1)

Έστω $(x_n)\subseteq \mathrm{A}-\{a\}: x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$, υπάρχει
τότε $n_0 \in N : n \ge n_0$ τότε $\|x_n - a\| < \delta$ (2). Από τις (1) και (2) έπεται ότι: αν $n \ge n_0$ τότε $\|f(x_n)-b\| < \varepsilon$. Δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} b$.

(ιι) $\Rightarrow$(ι) Έστω ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός (ι). Τότε θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in \mathrm{A}-\{a\}$ με $\|x_\delta - a\| < \delta$ και $\|f(x_\delta)-b\| \ge \varepsilon$ (3).

Άρα για $\delta_n = \dfrac{1}{n}, n \ge 1$ υπάρχει $x_n \in \mathrm{A}-\{a\}$: ($\|x_n - a\| < \dfrac{1}{n}$ και $\|f(x_n)-b\| \ge \varepsilon$. Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$ και $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο b, άτοπο από την υπόθεσή μας.

Σημείωση: 1) Οι συναρτήσεις <u>προβολές</u> $\pi_k : R^n \to R, k = 1,2,...,n$ ορίζονται ως $\pi_k(x) = x_k$, όπου $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$

2) Αν $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνάρτηση τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\pi_k o f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R, k = 1,2,...,m$. Γράφουμε τότε $f_k = \pi_k o f, k = 1,2,...,m$, δηλαδή $f_k(x) = \pi_k(f(x)), k = 1,2,...,m$. Είναι τότε σαφές ότι, $f(x) = (f_1(x),...,f_m(x)), x \in \mathrm{A}$. Δηλαδή $f_k(x)$ είναι η $k-$συντεταγμένη του διανύσματος $f(x), 1 \le k \le m$. Για παράδειγμα, αν $f(x,y) = (x^2+y^2, x\cdot y, x-y)$, τότε $f_1(x,y) = x^2+y^2$, $f_2(x,y) = x\cdot y$ και $f_3(x,y) = x-y$.

Οι <u>αλγεβρικές</u> ιδιότητες των ορίων περιγράφονται στην επόμενη.

2.17 Πρόταση. Έστω, $f, g : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συναρτήσεις, $a \in R^n$ σ.σ. του $\mathrm{A}, b \in R^m$ και $\lambda \in R$. Τότε έχουμε:

(1) Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$,
τότε $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda \cdot b$,
(όπου η $\lambda f : \mathrm{A} \to R^m$ ορίζεται ως $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ $x \in \mathrm{A}$).

(2) (Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1, \lim\limits_{x\to a} g(x) = b_2$
τότε $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = b_1 + b_2$, (όπου η $f+g : \mathrm{A} \to R^m$ ορίζεται με $(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in \mathrm{A}$).

(3) Αν, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1, \lim\limits_{x\to a} g(x) = b_2$
τότε $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = b_1 \cdot b_2$ (εσωτερικό γινόμενο), (όπου η $f\cdot g : \mathrm{A} \to R^m$ ορίζεται με $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x), x \in \mathrm{A}$). Για $m=1$ έχουμε βέβαια το σύνηθες γινόμενο πραγματικών αριθμών.

(4) Αν $m=1$ και $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \ne 0$ τότε $f(x) \ne 0$ για x «κοντά» στο a και $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{b}$ (η $\dfrac{1}{f}$ ορίζεται τότε σε κατάλληλη περιοχή του a στο σύνολο A).

(5) Αν $f(x) = (f_1(x),...,f_m(x))$, όπου $f_1,...,f_m : \mathrm{A} \to R$ είναι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της f, τότε, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b = (b_1,...,b_m) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f_k(x) = b_k$ για κάθε $k = 1,2,...,m$.

Απόδειξη: Οι ιδιότητες (1) έως (4) συνάγονται εύκολα από τις αντίστοιχες αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών και τον χαρακτηρισμό των ορίων με ακολουθίες
(θεώρημα 2.16). Η (4) χρησιμοποιεί και τον ορισμό του ορίου.
Η ιδιότητα (5) αποδεικνύεται με χρήση της πρότασης 1.5 (κατά συντεταγμένες σύγκλιση μιας ακολουθίας $\left(x_k\right) \subseteq R^n$) και τον χαρακτηρισμό των ορίων με ακολουθίες (θεώρημα 2.16). Έτσι οι αποδείξεις αυτές αφήνονται ως άσκηση.

Παραδείγματα: Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+y^2\right)-1}{x^2+y^2} \right)$ και

(β) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{\eta\mu\left(x^2+2y^2\right)}{x^2+y^2} \right)$

Λύση (α) Σύμφωνα με την πρόταση 2.17 (5) αρκεί να υπολογίσουμε τα όρια $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+y^2\right)-1}{x^2+y^2}$.

Για το πρώτο όριο έχουμε: $\left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \dfrac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{y^2}} = \dfrac{|x|\cdot|y|}{|y|} = |x| \le \sqrt{x^2+y^2}$. (Αν $\varepsilon > 0$ θέτουμε $\delta = \varepsilon$).

Συνεπώς, εφόσον $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, (για τον υπολογισμό αυτού του ορίου με τον ορισμό των ορίων, αρκεί δοθέντος του $\varepsilon > 0$, να θέσουμε $\delta = \varepsilon$) έπεται ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Για τη δεύτερη συντεταγμένη παρατηρούμε ότι, θέτοντας $z = x^2+y^2$ έχουμε ότι ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) = 0$, άρα)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+y^2\right)-1}{x^2+y^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu z - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu z - \sigma\upsilon\nu 0}{z-0} = \sigma\upsilon\nu' 0 = -\eta\mu 0 = 0.$$

(β) Για το δεύτερο όριο παρατηρούμε ότι αν $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και $g(x,y) = \dfrac{\eta\mu\left(x^2+2y^2\right)}{x^2+y^2}$ τότε έχουμε: $f(0,y) = 0, y \in R$, $y \ne 0$ άρα $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$ και $f(|x|,0) = \dfrac{|x|}{|x|} = 1, x \in R, x \ne 0$, άρα $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x,0) = 1$. Έτσι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ κατά συνέπεια (από την πρόταση 2.17 (5)) ούτε και το ζητούμενο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(f(x,y), g(x,y) \right)$ στον R^2.

Για λόγους πληρότητας εξετάζουμε και το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

Έτσι έχουμε:

$$g\left(x,0\right)=\frac{\eta\mu x^2}{x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}1 \text{ και } g\left(0,y\right)=2\cdot\frac{\eta\mu 2y^2}{2y^2}\xrightarrow[y\to 0]{}2\cdot 1=2.$$

Έτσι ούτε το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g\left(x,y\right)$ υπάρχει.