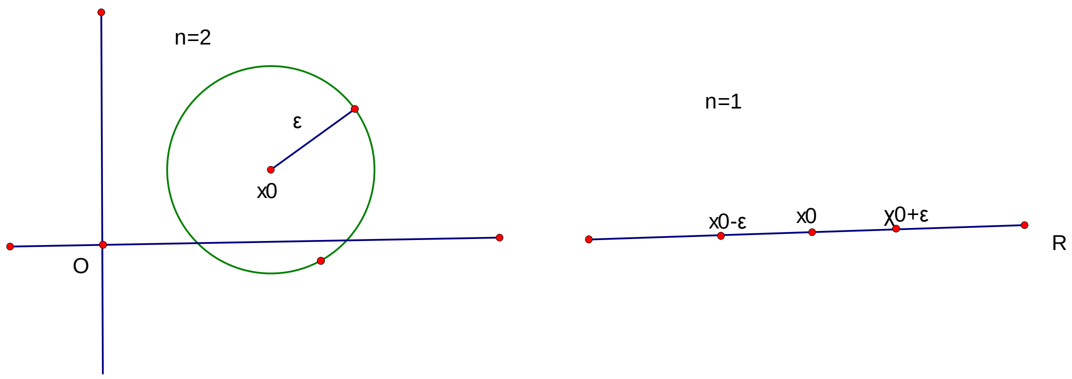
Ανοικτά και κλειστά σύνολα

Στην παράγραφο αυτή αναπτύσσεται ο μηχανισμός που θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε τις αναλυτικές ιδιότητες των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Θα χρειαστούμε τις έννοιες της ανοικτής σφαίρας του ανοικτού και του κλειστού συνόλου στον R^n, για να κατανοήσουμε καλύτερα τα όρια και θα χρειαστούμε τα όρια, για να ορίσουμε την συνέχεια την διαφορισιμότητα, καθώς και την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Έστω, $x_0 \in R^n$ και $\varepsilon > 0$, η ανοικτή σφαίρα κέντρου x_0 και ακτίνας ε είναι το σύνολο $\mathrm{B}(x_0,\varepsilon)=\{x\in R^n : \|x-x_0\|<\varepsilon\}$.

Η κλειστή σφαίρα $\overline{\mathrm{B}}(x_0,\varepsilon)$ ορίζεται ως το σύνολο $\overline{\mathrm{B}}(x_0,\varepsilon)=\{x\in R^n : \|x-x_0\|\le\varepsilon\}$.

Επίσης συμβολίζεται και με το σύμβολο $\widehat{B}(x_0,\varepsilon)$.



Ο δίσκος $\mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$ το ανοικτό διάστημα $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

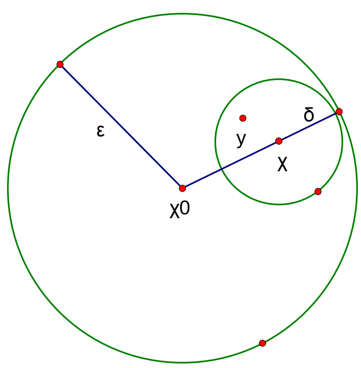
Στην περίπτωση $n=2$ του Ευκλείδειου επιπέδου χρησιμοποιούμε και τους όρους ανοικτός και κλειστός δίσκος αντίστοιχα.

2.1 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$. Το U λέγεται ότι είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n, αν για κάθε $x\in U$ υπάρχει $\varepsilon>0$ (εξαρτώμενο από το σημείο $x\in U$), ώστε $\mathrm{B}(x,\varepsilon)\subseteq U$.

Προφανώς ο ίδιος ο χώρος R^n είναι ανοικτό σύνολο (στον εαυτό του).
Συμβατικά θεωρούμε και το $\varnothing$ σύνολο ως ανοικτό.
Το πρώτο μη τετριμμένο παράδειγμα ανοικτού συνόλου που θα δούμε είναι η ανοικτή σφαίρα στον R^n .

2.2 Πρόταση: Κάθε ανοικτή σφαίρα στον R^n είναι ανοικτό σύνολο.

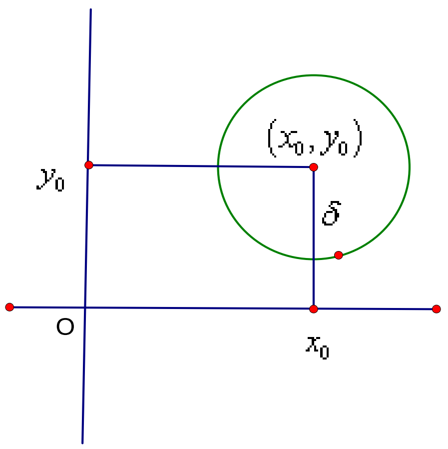
Απόδειξη: Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέβαια γεωμετρικά προφανές αν $n=2$ ή $n=3$. Η γεωμετρική αυτή αίσθηση μας οδηγεί και στην αναλυτική απόδειξη της γενικής περίπτωσης.



έστω $x\in \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)\Leftrightarrow \|x-x_0\|<\varepsilon$. Πρέπει να βρούμε $\delta>0 : \mathrm{B}(x,\delta)\subseteq \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$. Θέτουμε $\delta=\varepsilon-\|x-x_0\|>0$. Έστω, $y\in \mathrm{B}(x,\delta)\Leftrightarrow \|y-x\|<\delta$.

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$\|y-x_0\| = \|(y-x)+(x-x_0)\| \le \|y-x\|+\|x-x_0\| < \delta + \|x-x_0\| = \varepsilon$.
Επομένως, $\|y-x_0\| < \varepsilon \Leftrightarrow y \in \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$ και άρα $\mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$



Παραδείγματα: 1) Το άνω ανοικτό ημιεπίπεδο $\mathrm{E} = \{(x,y) \in R^2 : y > 0\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Η απόδειξη είναι απλή και γεωμετρικά προφανής και έτσι παραλείπεται:

$\mathrm{B}((x_0,y_0),\delta) \subseteq \mathrm{E}$ όπου $0 < \delta < y_0$

2) Αν $\mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$ είναι ανοικτή σφαίρα και $x_1 \in \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)$, τότε το σύνολο $\mathrm{B}(x_0,\varepsilon) - \{x_1\}$ είναι ανοικτό. Γενικότερα, αν $U \subseteq R^n$ ανοικτό και $F \subseteq U$ πεπερασμένο, τότε το $U - F$ είναι ανοικτό σύνολο. (γιατί;)

2.3 Ορισμός. Αν $\mathrm{A} \subseteq R^n$, ένα σημείο $x \in \mathrm{A}$ λέγεται <u>εσωτερικό</u> σημείο του Α, αν υπάρχει $\delta > 0 : \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{A}$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου Α ονομάζεται το <u>εσωτερικό</u> του Α και συμβολίζεται με $\operatorname{int}(\mathrm{A})$ (ή A^o).

2.4 Πρόταση. Το εσωτερικό $\operatorname{int}(\mathrm{A})$ ενός συνόλου $\mathrm{A} \subseteq R^n$ είναι το <u>μεγαλύτερο ανοικτό</u> σύνολο, που περιέχεται στο Α. Ιδιαίτερα αν Α ανοικτό τότε Α=int(Α).

Απόδειξη: Υποθέτουμε βέβαια ότι $\operatorname{int}(\mathrm{A}) \neq \varnothing$ και αποδεικνύουμε πρώτα ότι $\operatorname{int}(\mathrm{A})$ είναι ανοικτό σύνολο. Αν $x \in \operatorname{int}(\mathrm{A})$, υπάρχει $\delta > 0 : \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{A}$. Αν $y \in \mathrm{B}(x,\delta)$ τότε, επειδή η σφαίρα $\mathrm{B}(x,\delta)$ είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\varepsilon > 0 : \mathrm{B}(y,\varepsilon) \subseteq \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \mathrm{A}$. Άρα, $y \in \operatorname{int}(\mathrm{A})$ και έτσι, $\mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{A})$, το οποίο σημαίνει ότι $\operatorname{int}(\mathrm{A})$ είναι ένα ανοικτό σύνολο. Επίσης παρατηρούμε ότι, αν U είναι ανοικτό σύνολο με $U \subseteq \mathrm{A}$ τότε $U \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{A})$, έπεται ότι $\operatorname{int}(\mathrm{A})$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο Α. Ο τελευταίος ισχυρισμός είναι προφανής.

Παραδείγματα. 1) Το εσωτερικό του συνόλου $\mathrm{A} = [0,1) \subseteq R$ είναι το ανοικτό διάστημα $(0,1)$.
2)Το εσωτερικό $\operatorname{int}(\overline{\mathrm{B}}(x,\delta))$ του κλειστού δίσκου $\overline{\mathrm{B}}(x,\delta)$ του R^2 είναι ο ανοικτός δίσκος $\mathrm{B}(x,\delta)$ (γεωμετρικά προφανές).
3)Ένα άπειρο υποσύνολο του R^n μπορεί να έχει κενό εσωτερικό, πχ. $\operatorname{int}(Q) = \varnothing$ (όπου $Q =$ το σύνολο των ρητών στο R). Επίσης στον R^n τα σύνολα Q^n και Z^n έχουν κενό εσωτερικό.

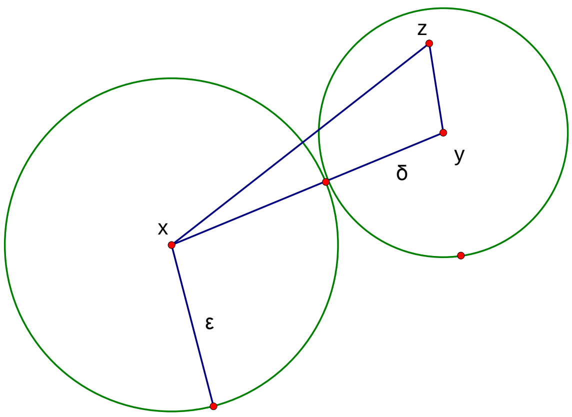
2.5 Πρόταση. (ι) Η ένωση οποιασδήποτε οικογένειας $\{V_i : i \in I\}$ ανοικτών υποσυνόλων του R^n είναι ανοικτό σύνολο.
(ιι) Η τομή μιας πεπερασμένης οικογένειας $\{V_1,...,V_n\}$, ανοικτών υποσυνόλων του R^n είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη: (ι) Έστω, $x \in \bigcup_{i\in I} V_i$, τότε υπάρχει $i_0 \in I : x \in V_{i_0}$, επειδή το V_{i_0} είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\delta >: \mathrm{B}(x,\delta) \subseteq V_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. Συνεπώς η ένωση $\bigcup_{i\in I} V_i$ είναι ανοικτό σύνολο.
(ιι) Έστω, $x \in \bigcap_{k=1}^{n} V_k$, (αν $\bigcap_{k=1}^{n} V_k = \varnothing$ τότε προφανώς ισχύει το συμπέρασμα). Για κάθε $k = 1,2,...,n$ υπάρχει $\delta_k > 0 : \mathrm{B}(x,\delta_k) \subseteq V_k$. Αν $\delta = \min\{\delta_1,...,\delta_n\}$ τότε $\delta > 0$ και $\mathrm{B}(x,\delta) \subseteq V_k$ για κάθε $k = 1,2,...,n$. Άρα $\mathrm{B}(x,\delta) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} V_k$ και η τομή $\bigcap_{k=1}^{n} V_k$, είναι ανοικτό σύνολο.

Ενδιαφέρουσα και χρήσιμη είναι και η έννοια του κλειστού συνόλου στον R^n.

2.6 Ορισμός. Ένα υποσύνολο $F \subseteq R^n$ λέγεται <u>κλειστό</u>, αν το συμπλήρωμά του $U = R^n - F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n.
Προφανώς ο R^n και το κενό σύνολο είναι κλειστά υποσύνολα του R^n.
Σημειώνουμε ότι υπάρχουν σύνολα που <u>δεν</u> είναι ανοικτά, αλλά <u>ούτε</u> και κλειστά στον R^n. Για παράδειγμα το διάστημα $(0,1]$ στο R, δεν έχει καμιά από τις δύο αυτές ιδιότητες. Πρέπει να είναι σαφές ότι τα πεπερασμένα υποσύνολα του R^n είναι κλειστά (γιατί;).

2.7. Πρόταση. Κάθε κλειστή σφαίρα $\overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό υποσύνολο του R^n.



Απόδειξη. Έστω, $y \in R^n - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon) \Leftrightarrow \|x-y\| > \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = \|x-y\| - \varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}(y,\delta) \subseteq R^n - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$. Πράγματι, αν $z \in \mathrm{B}(y,\delta)$, τότε

$$\|z-x\| \geq \big|\|x-y\| - \|z-y\|\big| \geq \|x-y\| - \|z-y\| > \varepsilon + \delta - \delta = \varepsilon$$

.

Επομένως, $z \in R^n - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ και το σύνολο $R^n - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό. Συνεπώς η $\overline{\mathrm{B}}(x_0,\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο.

2.8. Ορισμός Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$ και $x \in R^n$.

(ι) Το x λέγεται σημείο <u>επαφής</u> του Α, αν $\mathrm{B}(x,\delta)\bigcap \mathrm{A}\neq\varnothing$ για κάθε $\delta>0$. Το σύνολο των σημείων επαφής του Α λέγεται <u>κλειστότητα</u> του Α και συμβολίζεται με $\overline{\mathrm{A}}$. Προφανώς $\mathrm{A}\subseteq\overline{\mathrm{A}}$.

(ιι) Το x λέγεται σημείο <u>συσσώρευσης</u> (σ.σ.) του Α, αν $\mathrm{B}(x,\delta)\bigcap\left(\mathrm{A}-\{x\}\right)\neq\varnothing$ για κάθε $\delta>0$.

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του Α συμβολίζεται με A' και ονομάζεται το <u>παράγωγο</u> σύνολο του Α.

Παρατήρηση. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}\bigcup\mathrm{A}'$. (Αφήνετε ως άσκηση).

Παραδείγματα: 1) Το 1 είναι σημείο επαφής του $\mathrm{A}=\{1\}\bigcup[2,3]\subseteq R$ (καθώς $1\in\mathrm{A}$) αλλά <u>δεν</u> είναι σημείο συσσώρευσης του Α.

2) Κάθε σημείο της κλειστής σφαίρας $\overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ είναι σημείο συσσώρευσης της ανοικτής σφαίρας $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ (αλλά και της κλειστής σφαίρας $\overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$).. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση

3) Ένα σημείο συσσώρευσης ενδέχεται να ανήκει στο Α ή να μην ανήκει στο Α, όπως το παράδειγμα (2) μας δείχνει (αν $\|y-x\|=\varepsilon$, τότε το y είναι σημείο συσσώρευσης της $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$, όμως $y\notin\mathrm{B}(x,\varepsilon)$).

4)Αν $\mathrm{A}\subseteq R^n$ ανοικτό τότε $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{A}'=\overline{\mathrm{A}}$. (γιατί;)

2.9. Πρόταση. Έστω $\mathrm{A}\subseteq R^n$ και $x\in R^n$. Τότε x είναι σ.σ. του Α, αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(x_k)\subseteq\mathrm{A}-\{x\}$ (αντιστοίχως ακολουθία $(x_k)\subseteq\mathrm{A}$ με $x_n\neq x_m$ για $n\neq m$) ώστε $x_k\to x$

Απόδειξη: Είναι όμοια με την περίπτωση που $\mathrm{A}\subseteq R,(n=1)$ και έτσι παραλείπεται.

(Σημειώνουμε ακόμη ότι η απόδειξη αυτή είναι ανάλογη με την απόδειξη του χαρακτηρισμού των κλειστών συνόλων παρακάτω.)

Παρατήρηση: Αν το $x\in R^n$ είναι σημείο συσσώρευσης του Α τότε κάθε σφαίρα $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$, περιέχει άπειρα σημεία του Α. Ιδιαίτερα το Α είναι <u>άπειρο</u> σύνολο. (Γιατί;)

2.10. Λήμμα. Έστω, $\mathrm{A}\subseteq R^n$ τότε έχουμε:

(ι) $\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^c=\operatorname{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$, επομένως το $\overline{\mathrm{A}}$ είναι κλειστό υποσύνολο του R^n.

(ιι) $\left(\operatorname{int}(\mathrm{A})\right)^c=\overline{\mathrm{A}^c}$.

Απόδειξη: (ι) Υπενθυμίζουμε ότι $\mathrm{A}\subseteq\overline{\mathrm{A}}$. Αν $x\in\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^c\Leftrightarrow x\notin\overline{\mathrm{A}}$, τότε υπάρχει $\delta>0:\mathrm{B}(x,\delta)\bigcap\mathrm{A}=\varnothing$, δηλαδή $\mathrm{B}(x,\delta)\subseteq\mathrm{A}^c$, που σημαίνει ότι $x\in\operatorname{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$. Άρα $\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^c=\operatorname{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$.

Έπεται από την ισότητα αυτή (εφόσον το εσωτερικό ενός συνόλου είναι ανοικτό) ότι το $\overline{\mathrm{A}}$ είναι κλειστό σύνολο.
(ιι) Εφαρμόζουμε την ισότητα που αποδείξαμε στο (ι) στο σύνολο A^c και έχουμε αμέσως την ισότητα (ιι).

2.11 Πρόταση. Αν $\mathrm{A} \subseteq R^n$, τότε η κλειστότητα $\overline{\mathrm{A}}$ του Α είναι το <u>μικρότερο κλειστό</u> σύνολο που περιέχει το Α.

Απόδειξη. Έπεται από το (ι) του προηγουμένου Λήμματος και το γεγονός , που ήδη αποδείξαμε, ότι το εσωτερικό ενός συνόλου είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται σε αυτό. (Αν F κλειστό και $\mathrm{A} \subseteq F$, τότε το $U = R^n - F$ είναι ανοικτό και $U \subseteq \mathrm{A}^c$, άρα $U \subseteq \operatorname{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$, ή $R^n - F \subseteq R^n - \overline{\mathrm{A}}$ ή $\overline{\mathrm{A}} \subseteq F$).

2.12 Πρόταση. Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:
(ι) Α είναι κλειστό
(ιι) $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$
(ιιι) Για κάθε ακολουθία $(x_k) \subseteq \mathrm{A}$ η οποία είναι συγκλίνουσα, έστω $x_k \to x$, έπεται ότι $x \in \mathrm{A}$

Απόδειξη. (ι)$\Rightarrow$(ιι) Επειδή γενικά ισχύει $\mathrm{A} \subseteq \overline{\mathrm{A}}$, το αποτέλεσμα έπεται αμέσως από την προηγουμένη πρόταση.
(ιι)$\Rightarrow$(ιιι) Έστω, $(x_k) \subseteq \mathrm{A}$ με $x_k \to x$, αν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in N : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \mathrm{B}(x,\varepsilon)$. Συνεπώς $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \mathrm{B}(x,\varepsilon) \bigcap \mathrm{A}$. Ιδιαίτερα έπεται ότι $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \bigcap \mathrm{A} \neq \varnothing$. Άρα το $x \in \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$.
(ιιι)$\Rightarrow$(ι) Έστω, ότι το A^c δεν είναι ανοικτό, τότε υπάρχει $x \in \mathrm{A}^c = R^n - \mathrm{A}$,ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ η σφαίρα $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \not\subset \mathrm{A}^c \Leftrightarrow \mathrm{B}(x,\varepsilon) \bigcap \mathrm{A} \neq \varnothing$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ για $k \in N$ και προχωρώντας με επαγωγή επιλέγουμε μία ακολουθία $(x_k) \subseteq \mathrm{A}$ με $x_k \in \mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}\left(x, \dfrac{1}{k}\right)$ για κάθε $k \geq 1$. Έπεται ότι $\|x_k - x\| \leq \dfrac{1}{k}$ για κάθε $k \geq 1 \Rightarrow x_k \to x$. Αλλά τότε $x \in \mathrm{A}$, το οποίο αντιφάσκει με την επιλογή του x.

Από την συνολοθεωρία υπενθυμίζουμε τους κανόνες του De Morgan:
Έστω Χ σύνολο και $\{\mathrm{A}_i : i \in I\}$ οικογένεια υποσυνόλων του Χ, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
$$\left(\bigcup_{i\in I} \mathrm{A}_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} \mathrm{A}_i^c \quad \text{και} \quad \left(\bigcap_{i\in I} \mathrm{A}_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} \mathrm{A}_i^c$$

2.13 Πρόταση. (ι) Η τομή κάθε οικογένειας $\{F_i : i \in I\}$ κλειστών υποσυνόλων του R^n είναι κλειστό σύνολο.
(ιι) Η ένωση μιας πεπερασμένης οικογένειας $\{F_1, \ldots, F_n\}$ κλειστών υποσυνόλων του R^n είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τους <u>κανόνες του De Morgan</u> και τις αντίστοιχες ιδιότητες των ανοικτών υποσυνόλων του R^n, που περιγράψαμε προηγουμένως

2.14 Ορισμός. Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$. Το <u>σύνορο</u> του A στον R^n ορίζεται από την ισότητα $\partial \mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \bigcap \overline{\mathrm{A}^c}$

Επειδή όπως αποδείξαμε, ισχύει ότι $\left(\mathrm{int}\left(\mathrm{A}\right)\right)^c = \overline{\mathrm{A}^c}$, έπεται ότι $\partial \mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} - \mathrm{int}\left(\mathrm{A}\right)$.

Τα σημεία του $\partial \mathrm{A}$ ονομάζονται και <u>συνοριακά</u> σημεία του A. Παρατηρούμε ότι το $x \in R^n$ είναι συνοριακό σημείο του A ακριβώς τότε, αν $\mathrm{B}\left(x, \varepsilon\right) \bigcap \mathrm{A} \neq \varnothing$ και $\mathrm{B}\left(x, \varepsilon\right) \bigcap \mathrm{A}^c \neq \varnothing$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Παραδείγματα. 1) Το σύνορο του διαστήματος $\mathrm{I} = \left[0,1\right]$ είναι το σύνολο $\partial \mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}} \bigcap \overline{R - \mathrm{I}} = \mathrm{I} \bigcap \left(\left(-\infty, 0\right] \bigcup \left[1, +\infty\right)\right) = \left\{0,1\right\}$.

2)Το σύνορο του άνω ημιεπιπέδου $\mathrm{A} = \left\{\left(x, y\right) \in R^2 : y > 0\right\}$ είναι η ευθεία (των πραγματικών αριθμών) $\left\{\left(x, 0\right) : x \in R\right\}$ του R^2. (Γεωμετρικά προφανές).

3) Αν $\mathrm{B}\left(x, \varepsilon\right)$ είναι ένας ανοικτός δίσκος στον R^2, τότε το σύνορό του είναι ο κύκλος $S\left(x, \varepsilon\right) = \left\{y \in R^2 : \left\|x - y\right\| = \varepsilon\right\}$. (Γεωμετρικά προφανές).

4) Μπορεί μάλλον εύκολα να αποδειχθεί ότι το προηγούμενο παράδειγμα γενικεύεται σε κάθε R^n. Αν $\mathrm{B}\left(x, \varepsilon\right)$ είναι μια ανοικτή σφαίρα στον R^n, τότε το σύνορό της είναι το σύνολο $\partial \mathrm{B}\left(x, \varepsilon\right) = \overline{\mathrm{B}}\left(x, \varepsilon\right) - \mathrm{B}\left(x, \varepsilon\right) = S\left(x, \varepsilon\right)$, όπου $S\left(x, \varepsilon\right) = \left\{y \in R^n : \left\|x - y\right\| = \varepsilon\right\}$ είναι η επιφάνειά της.

(Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η κλειστότητα της ανοικτής σφαίρας $\mathrm{B}\left(x, \varepsilon\right)$ ισούται με την αντίστοιχη κλειστή σφαίρα $\overline{\mathrm{B}}\left(x, \varepsilon\right)$, οπότε το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό του συνόρου. Η απόδειξη αυτή αφήνεται ως άσκηση).

Παρατηρήσεις. 1) Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η έννοια του συνόρου στην περίπτωση που το A είναι ένα <u>ανοικτό</u> σύνολο. Παρατηρούμε τότε ότι, (αν A ανοικτό) ένα σημείο $x \in R^n$ ανήκει στο $\partial \mathrm{A}$, αν και μόνο αν , το x είναι σημείο συσσώρευσης του A και $x \notin \mathrm{A}$ (γιατί;). Αυτό εκφράζει την διαισθητική ιδέα ότι ένα συνοριακό σημείο ενός συνόλου είναι ένα σημείο στην «άκρη» του συνόλου.

2)Ένα συνοριακό σημείο μπορεί βέβαια να ανήκει στο σύνολο, όπως δείχνει το παράδειγμα του κλειστού δίσκου $\overline{\mathrm{B}}\left(x, \varepsilon\right)$ και των σημείων της περιφερείας του $S\left(x, \varepsilon\right)$.

3) Αν $\mathrm{A} \subseteq R^n$ τότε τα σύνολα, $\mathrm{int}\,\mathrm{A}, \partial \mathrm{A}$ και $\mathrm{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$ είναι ανά δύο <u>ξένα</u> και ισχύει, $R^n = \mathrm{int}\left(\mathrm{A}\right) \bigcup \partial \mathrm{A} \bigcup \mathrm{int}\left(\mathrm{A}^c\right)$ (Άσκηση).

4) Ένα υποσύνολο A του R^n λέγεται <u>φραγμένο</u>, αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0 : \left\|x\right\| \leq \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$. Αποδεικνύεται ότι (<u>θεώρημα Bolzano</u>): Κάθε άπειρο και φραγμένο υποσύνολο του R^n έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης (Άσκηση).

Βέβαια, ένα άπειρο υποσύνολο του R^n ενδέχεται να μην έχει σημεία συσσώρευσης, π.χ. $\mathrm{A} = N \subset R$ ή $\mathrm{A} = Z \subset R$.