

Ακολουθίες στον R^n

1.4. Ορισμός Έστω (x_k) ακολουθία διανυσμάτων στον R^n και $x \in R^n$, θα λέμε ότι η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο x και θα γράφουμε, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ ή $x_k \rightarrow x$ αν η ακολουθία πραγματικών $\|x_k - x\| \rightarrow 0$

Ισοδύναμα: $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 = k_0(\varepsilon) \in N : k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - x\| < \varepsilon$.

Παραδείγματα: 1) Έστω $x_k = \left(\frac{1}{2^k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right), k \geq 1$ ακολουθία στον R^2 , τότε

$x_k \rightarrow (0, e)$.

Πράγματι, $\|x_k - (0, e)\| = \left\| \left(\frac{1}{2^k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k - e \right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{2^{2k}} + \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k - e \right)^2}$

Όμως $\frac{1}{2^{2k}} + \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k - e \right)^2 \rightarrow 0 + 0$ εφόσον $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e$.

Συνεπώς $\|x_k - (0, e)\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_k \rightarrow (0, e)$.

(2) Η ακολουθία $y_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right)$ του R^2 δεν είναι συγκλίνουσα. Πράγματι αν

υπήρχε $y \in R^2 : y_k \rightarrow y$ τότε η ποσότητα $\|y_k - y\|$ θα γινόταν οσοδήποτε μικρή για μεγάλο k , π.χ. $\|y_k - y\| < \frac{1}{4}$ για μεγάλο k . Έπεται τότε από την τριγωνική ανισότητα

ότι για μεγάλα k και λ με $k \neq \lambda$ θα είχαμε,

$$\|y_k - y_\lambda\| \leq \|y_k - y\| + \|y_\lambda - y\| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Όμως $\|y_k - y_{k+1}\|^2 = \left\| \left((-1)^k - (-1)^{k+1}, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\|^2 =$

$$= \begin{cases} \left\| \left(+2, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\|^2 = (+2)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)^2 > 4 \text{ αν } k \text{ άρτιος} \\ \left\| \left(-2, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\|^2 = (-2)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)^2 > 4 \text{ αν } k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Έτσι $\|y_k - y_{k+1}\| > 2$ για κάθε $k \in N$. Άρα η (y_k) δεν είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον R^2 .

1.5 Πρόταση Έστω $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n), k \geq 1$ ακολουθία στον R^n και

$x = (x^1, \dots, x^n) \in R^n$. Τότε, $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} x \Leftrightarrow x_k^\lambda \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} x^\lambda$ για κάθε $\lambda = 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη: Θα χρειαστούμε την ακόλουθη ανισότητα:

Αν $a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$ τότε, $\max_{1 \leq k \leq n} |a_k| \leq \|a\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$

Πράγματι, έστω $|a_\lambda| = \max(|a_1|, \dots, |a_n|)$ τότε $|a_\lambda| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \|a\|$ ή $\max_{1 \leq k \leq n} |a_k| \leq \|a\|$.

Επίσης, $a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq \underbrace{|a_\lambda|^2 + \dots + |a_\lambda|^2}_{n\text{-φορές}} = n|a_\lambda|^2 \Rightarrow \|a\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$

Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη της πρότασης. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k \geq 1$, $\max_{1 \leq \lambda \leq n} |x_k^\lambda - x^\lambda| \leq \|x_k - x\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq \lambda \leq n} |x_k^\lambda - x^\lambda|$. Από την ανισότητα αυτή έπεται αμέσως το συμπέρασμα.

Παρατηρήσεις (1). Η προηγούμενη πρόταση μας λέει ότι μια ακολουθία $(x_k) = (x_k^1, \dots, x_k^n), k \geq 1$ του R^n συγκλίνει στο $(x^1, \dots, x^n) \Leftrightarrow$ συγκλίνει κατά συντεταγμένες.

Έτσι ο έλεγχος της σύγκλισης μιας ακολουθίας $(x_k) = (x_k^1, \dots, x_k^n), k \geq 1$ του R^n ανάγεται στην σύγκλιση των « συνιστωσών » ακολουθιών πραγματικών αριθμών $(x_k^\lambda), k \geq 1, \lambda = 1, 2, \dots, n$

Για παράδειγμα η ακολουθία $y_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k} \right), k \geq 1$ του R^2 (βλέπε παράδειγμα (2) ανωτέρω), δεν είναι συγκλίνουσα καθώς , όπως γνωρίζουμε, η ακολουθία $(-1)^k, k \geq 1$ δεν είναι συγκλίνουσα στο R .

(2) Αν μια ακολουθία (x_k) είναι συγκλίνουσα στον Ευκλείδειο χώρο R^n , τότε το όριο της είναι μοναδικό. Αυτό έπεται εύκολα χρησιμοποιώντας τριγωνική ανισότητα

Άλγεβρα συγκλινουσών ακολουθιών στον R^n :

Αν $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ και $y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ στον R^n τότε:

(α) $x_k + y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x + y$

(β) $\lambda x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} \lambda x$ για κάθε $\lambda \in R$ και

(γ) $x_k \cdot y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x \cdot y$ (εσωτερικό γινόμενο)

Η απόδειξη των (α) και (β) είναι ανάλογη με την αντίστοιχη ιδιότητα των πραγματικών ακολουθιών και έτσι αφήνεται ως άσκηση. (Μπορεί να συναχθεί ακόμη από την πρόταση 1.5). Η απόδειξη της (γ) έπεται από την πρόταση 1.5 και την αντίστοιχη ιδιότητα, για το όριο του γινομένου πραγματικών ακολουθιών.

Φραγμένες ακολουθίες στον R^n

1.6 Ορισμός. Μια ακολουθία $(x_k) \subseteq R^n$ λέγεται φραγμένη αν υπάρχει $M > 0: \|x_k\| \leq M$ για κάθε $k \geq 1$.

1.7 Πρόταση. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ του R^n είναι φραγμένη (αλλά όχι το αντίστροφο).

Απόδειξη Έστω $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Leftrightarrow \|x_k - x\| \rightarrow 0$. Η μηδενική ακολουθία πραγματικών αριθμών $\|x_k - x\|, k \geq 1$ είναι βέβαια φραγμένη, άρα υπάρχει $c > 0: 0 \leq \|x_k - x\| \leq c$ για κάθε $k \geq 1$. Από την τριγωνική ανισότητα συμπεραίνουμε ότι $\|x_k\| = \|(x_k - x) + x\| \leq \|x_k - x\| + \|x\| \leq c + \|x\|$. Θέτουμε $M = c + \|x\|$

Το παράδειγμα της ακολουθίας $y_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k} \right), k \geq 1$ (του παραδείγματος (2) ανωτέρω) η οποία δεν είναι συγκλίνουσα στον R^2 , αλλά είναι φραγμένη. (Εφόσον $\|y_k\|^2 = (-1)^{2k} + \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{k^2} \leq 2 \Leftrightarrow \|y_k\| \leq \sqrt{2}$, για κάθε $k \geq 1$) μας πείθει ότι το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει .

Το θεμελιώδες θεώρημα του Bolzano για την πραγματική ευθεία ισχύει γενικότερα και για τον Ευκλείδειο χώρο R^n .

1.8 Θεώρημα (Bolzano). Έστω $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n), k \geq 1$ φραγμένη ακολουθία στοιχείων του R^n τότε η (x_k) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στον R^n .

Απόδειξη: Υποθέτουμε για απλότητα ότι $n = 2$ έτσι $x_k = (x_k^1, x_k^2), k \geq 1$. Επειδή, $\max_{1 \leq \lambda \leq 2} |x_k^\lambda| \leq \|x_k\|$ για κάθε $k \in N$ έπεται ότι οι δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών (x_k^1) και (x_k^2) είναι φραγμένες. Έστω $(x_{k_l}^1)$ συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_k^1) ώστε $x_{k_l}^1 \rightarrow x^1$ (θεώρημα Bolzano για το R).

Έπεται ότι η υπακολουθία $(x_{k_l}^2)_{l \geq 1}$ της (x_k^2) που είναι βέβαια φραγμένη έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία έστω $(x_{k_{l_m}}^2)_{m \geq 1}$ ώστε $x_{k_{l_m}}^2 \rightarrow x^2$ (επίσης με το θεώρημα Bolzano). Είναι τώρα σαφές ότι $x_{k_{l_m}}^1 \rightarrow x^1$ και από την πρόταση 1.5, έπεται ότι η υπακολουθία $(x_{k_{l_m}}^1, x_{k_{l_m}}^2)_{m \geq 1}$ της (x_k) είναι συγκλίνουσα και $x_{k_{l_m}} \xrightarrow{\|\cdot\|} x = (x^1, x^2)$.

Όπως και στην περίπτωση του R (ή ακόμη χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.5), αποδεικνύεται και η ακόλουθη

1.9 Πρόταση: (α) Αν $(x_k) \subset R^n, x \in R^n$ και $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_k) συγκλίνει στο ίδιο όριο $(x_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x)$.
 (β) Αν $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ τότε $\|x_k\| \rightarrow \|x\|$ στο R . ($\| \|x_k\| - \|x\| \| \leq \|x_k - x\|$).

Παρατήρηση: Μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της ακολουθίας Cauchy (ή βασικής ακολουθίας) στον $(R^n, \|\cdot\|)$ και να αποδείξουμε (χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.5) ότι ο $(R^n, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης χώρος, δηλαδή ότι κάθε ακολουθία Cauchy $(x_k) \subset R^n$ είναι συγκλίνουσα στον R^n . Ακόμη να αποδείξουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy κλπ.

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της σειράς στον R^n και να αποδείξουμε αντίστοιχα αποτελέσματα όπως στον R . Για παράδειγμα η σειρά του R^2 , $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,

όπου $x_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n^2} \right), n \geq 1$ είναι συγκλίνουσα στον R^2 , εφόσον οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty, \left(= \frac{\pi^2}{6} \right)$. Συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \left(1, \frac{\pi^2}{6} \right)$ στον R^2 .

Οι παραπάνω ορισμοί και αποδείξεις είναι ανάλογοι με τους αντίστοιχους ορισμούς και αποδείξεις στο R

Παραδείγματα:

1) Να υπολογιστούν τα όρια, αν υπάρχουν, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\eta\mu n, \sigma\upsilon\nu \frac{n\pi}{2} \right)$ και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n^3 + 1}}{3^n}, \frac{\sqrt[n]{n^5 - 2n^4 + 5}}{2^n} \right)$$

Λύση: Η ακολουθία $\left(\eta\mu n, \sigma\upsilon\nu \frac{n\pi}{2} \right), n \geq 1$ δεν είναι συγκλίνουσα στο R^2 , εφόσον η ακολουθία πραγματικών $\sigma\upsilon\nu \frac{n\pi}{2}, n \geq 1$ δεν είναι συγκλίνουσα στο R . Πράγματι οι

υπακολουθίες $\sigma\upsilon\nu \frac{4n\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu(2n\pi) = 1, n \geq 1$ και

$\sigma\upsilon\nu \frac{(2n+1)\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0, n \geq 1$ της ακολουθίας $\sigma\upsilon\nu \frac{n\pi}{2}, n \geq 1$ συγκλίνουν

προφανώς σε διαφορετικά όρια.

Για την δεύτερη ακολουθία παρατηρούμε ότι: $\frac{\sqrt[n]{n^3 + 1}}{3^n} \rightarrow 0$ αφού $\sqrt[n]{n^3 + 1} \rightarrow 1$ και

$3^n \rightarrow +\infty$ και ακόμη ότι $\frac{\sqrt[n]{n^5 - 2n^4 + 5}}{2^n} \rightarrow 0$ αφού $\sqrt[n]{n^5 - 2n^4 + 5} \rightarrow 1$ και $2^n \rightarrow +\infty$.

Έπεται ότι $\left(\frac{\sqrt[n]{n^3+1}}{3^n}, \frac{\sqrt[n]{n^5-2n^4+5}}{2^n} \right) \xrightarrow{\|\|} (0,0)$

2) Να ελεγχθεί αν οι ακολουθίες,

$$(α) x_n = \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}, \sqrt[n]{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} \right) \text{ και}$$

(β) $y_n = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu n}{n}, \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2-\eta\mu n}} \right)$ συγκλίνουν και να βρεθούν τα όριά τους οποτεδήποτε υπάρχουν.

Λύση: Αρκεί σε κάθε περίπτωση να ελέγξουμε τις συντεταγμένες ακολουθίες:

(α) Η ακολουθία $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \rightarrow 1$, εφόσον $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ από το Λήμμα Cesaro.

Η ακολουθία $1 \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq 1 + 1 + \dots + 1 = n$ n -φορές άρα

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} \leq \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \text{ συνεπώς } \sqrt[n]{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} \rightarrow 1.$$

Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\|\|} (1,1)$.

$$(β) \frac{|\sigma\upsilon\nu n|}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu n}{n} \rightarrow 0$$

Παρατηρούμε ότι $1 \leq 2 - \eta\mu n \leq 3$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα $1 \leq \sqrt[n]{2 - \eta\mu n} \leq \sqrt[n]{3} \rightarrow 1$ έπεται

ότι $\sqrt[n]{2 - \eta\mu n} \rightarrow 1$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2 - \eta\mu n}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$

Άρα $y_n \xrightarrow{\|\|} (0,1)$.

Παρατηρήσεις 1) Η ακολουθία $\eta\mu n, n \geq 1$ δεν είναι συγκλίνουσα. Αν συνέκλινε έστω $\eta\mu n \rightarrow a \in R$, τότε θα είχαμε με χρήση γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\eta\mu(n+2) - \eta\mu n) = 2\eta\mu 1 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu(n+1) \text{ και συνεπώς } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu n = 0 \quad (1),$$

$$\text{επίσης } 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sigma\upsilon\nu(n+2) - \sigma\upsilon\nu n) = -2\eta\mu 1 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta\mu(n+1), \text{ άρα } \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta\mu n = 0 \quad (2).$$

Οι (1) και (2) όμως αντιφάσκουν με την γνωστή ταυτότητα $\eta\mu^2 n + \sigma\upsilon\nu^2 n = 1, n \in N$.

Υπενθυμίζουμε ότι: Αν $x, y \in R$ τότε:

$$\eta\mu x - \eta\mu y = 2\eta\mu \frac{x-y}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y = -2\eta\mu \frac{x-y}{2} \cdot \eta\mu \frac{x+y}{2}$$

2) Περαιτέρω σημειώνουμε ότι η ακολουθία $\eta\mu n, n \geq 1$ είναι πυκνή στο $[-1,1]$. Αυτό έπεται από το θεώρημα του Kronecker.

(Αν $\theta \in R - Q$ δηλαδή άρρητος αριθμός τότε η ακολουθία $z_n = e^{2\pi i n \theta}, n \geq 1$ είναι πυκνή στο μοναδιαίο κύκλο $T = \{z \in C : |z| = 1\}$. Για $\theta = \frac{1}{2\pi}$ έχουμε ότι η $z_n = e^{in} = \eta\mu n + i\sigma\upsilon n$ είναι πυκνή στον κύκλο T , από όπου έπεται ότι οι ακολουθίες $\eta\mu n$ και $\sigma\upsilon n, n \geq 1$ είναι πυκνές στο $[-1, 1]$. Σημειώνουμε ότι Q συμβολίζει το σύνολο των ρητών στο R). (Πρβλ. το [6], σελίδα 96-101.)

3) Το Λήμμα Cesaro ισχυρίζεται ότι, αν (x_n) είναι ακολουθία πραγματικών ώστε

$$x_n \rightarrow x, \text{ με } -\infty \leq x \leq +\infty, \text{ τότε } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow x.$$