

## Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ $R^n$

### Το εσωτερικό γινόμενο

Σε πολλές πρακτικές καταστάσεις, η τιμή μιας ποσότητας εξαρτάται από τις τιμές δύο ή περισσότερων άλλων ποσοτήτων. Για παράδειγμα η συνάρτηση  $V = \pi r^2 h$  υπολογίζει τον όγκο ενός ορθού κυλίνδρου, από την ακτίνα της βάσης  $r$  και το ύψος του  $h$ . Η θερμοκρασία  $T$  ενός σημείου της επιφάνειας της γης εξαρτάται από τις συντεταγμένες, πλάτος  $x$  και μήκος  $y$  του σημείου, έτσι γράφουμε  $T = T(x, y)$ . Αυτές οι παρατηρήσεις οδηγούν φυσιολογικά στην μελέτη συναρτήσεων  $f: A \subseteq R^2 \rightarrow R, g: A \subseteq R^3 \rightarrow R$  δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Η μελέτη αυτή οφείλει να είναι αντίστοιχη, με την μελέτη των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, όπου εξετάζονται έννοιες, όπως όριο, συνέχεια, διαφορισιμότητα και ολοκληρωσιμότητα συνάρτησης.

Στον Απειροστικό Λογισμό ( των συναρτήσεων μιας μεταβλητής) αυτό που επέτρεψε την μελέτη των παραπάνω οριακών διαδικασιών είναι η ύπαρξη μιας απόλυτης τιμής και άρα μιας απόστασης στην πραγματική ευθεία  $R$ .

Θα δούμε ευθύς αμέσως ότι το ίδιο μπορεί να γίνει και στο διανυσματικό χώρο  $R^n, n \in N$ . Υπενθυμίζουμε ότι τα  $n$ -διανύσματα  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$  του  $R^n$  συνιστούν μια αλγεβρική βάση την κανονική βάση του  $R^n$  και ότι γενικεύουν την συνήθη ορθοκανονική βάση  $i, j, k$  ( $i = e_1, j = e_2, k = e_3$ ) του  $R^3$ . Το τυχόν διάνυσμα  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  γράφεται ( μοναδικά) ως  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ . Για δύο διανύσματα  $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$  του  $R^3$ , είναι γνωστό ότι μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο τους  $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in R$ .

Ο ορισμός αυτός μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στον  $R^n$  για τυχόν  $n \in N$ . Έτσι ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $x = (x_1, \dots, x_n)$  και  $y = (y_1, \dots, y_n)$  του  $R^n$  με τον ανάλογο τρόπο, δηλαδή:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (= \sum_{i=1}^n x_i y_i).$$

**Σημείωση:** Στον  $R^n$  χρησιμοποιούμε συχνά και τον συμβολισμό,  $\langle x, y \rangle$  αντί του  $x \cdot y$ .

Συνεχίζοντας την αναλογία με τον  $R^3$  ορίζουμε ως μήκος η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος  $x = (x_1, \dots, x_n)$  τον μη αρνητικό πραγματικό,

$$|x| = \|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (= \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}).$$

Το ζεύγος  $(R^n, \|\cdot\|)$  ονομάζεται ο Ευκλείδειος χώρος διάστασης  $n$ .

Η ακόλουθη απλή πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

**1.1. Πρόταση .** Αν  $x, y, z \in R^n$  και  $\alpha, \beta \in R$  τότε έχουμε:

- (i)  $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$
- (ii)  $x \cdot y = y \cdot x$
- (iii)  $x \cdot x \geq 0$
- (iv)  $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

Η απόδειξη της πρότασης είναι απλή εφαρμογή του ορισμού του εσωτερικού γινομένου.

Αποδεικνύουμε τώρα μια σημαντική ανισότητα, την **ανισότητα Cauchy-Schwarz**

**1.2. Πρόταση.** Έστω  $x, y \in R^n$  τότε  $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

(ή  $|x \cdot y| \leq (\sqrt{x \cdot x}) \cdot (\sqrt{y \cdot y})$  όπου  $x = (x_1, \dots, x_n)$  και  $y = (y_1, \dots, y_n)$ )

**Απόδειξη:** Αν  $x = 0$  ή  $y = 0$  τότε η ανισότητα ισχύει τετριμμένα ως ισότητα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι  $x \neq 0 \neq y$

(I) Έστω ότι  $\|x\| = 1 = \|y\|$ . Τότε ισχύει  $|x_i y_i| \leq \frac{x_i^2 + y_i^2}{2}, i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{Άρα } \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή ισχύει η ανισότητα.

(II) Γενική περίπτωση: Θέτουμε  $x'_i = \frac{x_i}{\|x\|}$  και  $y'_i = \frac{y_i}{\|y\|}, 1 \leq i \leq n$ .

Από την περίπτωση (I) έπεται ότι:  $\left| \sum_{i=1}^n x'_i y'_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\|x\|} \cdot \frac{y_i}{\|y\|} \right) \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|} \leq 1$ , εφόσον

$$\sum_{i=1}^n x_i'^2 = 1 = \sum_{i=1}^n y_i'^2. \text{ Έπεται ότι } \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

**Άσκηση.** Αποδείξτε ότι ισότητα ισχύει στην ανισότητα Cauchy-Schwarz αν και μόνο αν τα διανύσματα  $x$  και  $y$  είναι συγγραμικά. Δηλαδή υπάρχει  $\lambda \in R$  με  $y = \lambda x$

**Λύση:** Αν  $y = \lambda x$  για κάποιο  $\lambda \in R$ , τότε εύκολα διαπιστώνουμε την ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Υποθέτουμε ότι  $|x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$ . Αν ένα από τα  $x$  και  $y$  έστω  $x = 0$  τότε θέτουμε  $\lambda = 0$  και παρατηρούμε ότι  $x = \lambda y$ . Έτσι υποθέτουμε επί πλέον ότι  $x \neq 0$  και  $y \neq 0$ .

Αν  $x = (x_1, \dots, x_n)$  και  $y = (y_1, \dots, y_n)$  τότε η ισότητα  $|x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$  γράφεται

ισοδύναμα ως  $\left| \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x\|} \cdot \frac{y_i}{\|y\|} \right| = 1$  και θέτοντας  $x'_i = \frac{x_i}{\|x\|}, y'_i = \frac{y_i}{\|y\|}$  γράφεται ως

$$\left| \sum_{i=1}^n x'_i \cdot y'_i \right| = 1 \text{ όπου } \sum_{i=1}^n x_i'^2 = 1 = \sum_{i=1}^n y_i'^2.$$

$$\text{Επομένως } 1 = \left| \sum_{i=1}^n x'_i \cdot y'_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x'_i \cdot y'_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i'^2 = 1 \quad (1)$$

Συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί  $x_1 y_1, \dots, x_n y_n$  είναι ομόσημοι αφού ισχύει η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα, δηλαδή  $\left| \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right| = \sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i|$ . Επίσης από την (1) έπεται

$$\text{ότι αναγκαία: } |x_i y_i| = \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{2} y_i^2, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

(α) Αν το κοινό πρόσημο των αριθμών  $x_1 y_1, \dots, x_n y_n$  είναι θετικό τότε οι ισότητες (2) συμπεραίνουν ότι  $x_i y_i = \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$  ή

$$\frac{x_i}{\|x\|} = \frac{y_i}{\|y\|} \Leftrightarrow x_i = \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y_i \Leftrightarrow x = \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y \text{ και } \lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}.$$

(β) Αν το κοινό πρόσημο των  $x_1 y_1, \dots, x_n y_n$  είναι αρνητικό τότε βρίσκουμε ότι  $-x_i y_i = \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) \Leftrightarrow (x_i + y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = -y_i$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$  συνεπώς

$$\frac{x_i}{\|x\|} = -\frac{y_i}{\|y\|} \Leftrightarrow x_i = -\frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y_i \Leftrightarrow x = -\frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y \text{ και } \lambda = -\frac{\|x\|}{\|y\|}.$$

**Παρατήρηση** Αν  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  τότε  $|x_1 + \dots + x_n| = |x_1| + \dots + |x_n| \Leftrightarrow$  οι  $x_1, \dots, x_n$  είναι ομόσημοι.

Πράγματι για  $n=2$  έχουμε ότι  $|x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2| \Leftrightarrow (|x_1 + x_2|)^2 = (|x_1| + |x_2|)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = (|x_1| + |x_2|)^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| \Leftrightarrow x_1 x_2 = |x_1 x_2| \geq 0$  συνεπώς οι  $x_1, x_2$  είναι ομόσημοι.

Αντίστροφα αν  $x_1 x_2 \geq 0$  τότε προφανώς  $|x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2|$ .

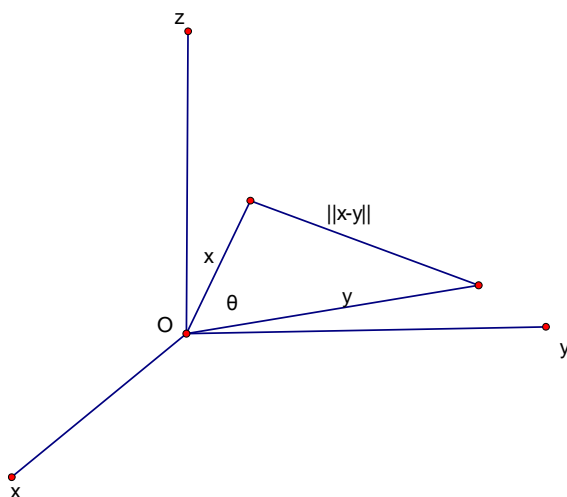
Το γενικότερο αποτέλεσμα έπεται τώρα με επαγωγή στο πλήθος  $n$  των αριθμών

#### Γεωμετρική σημασία της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι για μη μηδενικά διανύσματα  $x$  και  $y$  στον  $\mathbb{R}^n$  το πηλίκο  $\frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}$  ανήκει στο διάστημα  $[-1, 1]$  δηλαδή  $-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$ .

Έτσι ορίζεται η γωνία  $\theta$  μεταξύ των  $x$  και  $y$  με τον τύπο  $\cos \theta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}, \theta \in [0, \pi]$ .

Εξάλλου αν  $x$  και  $y$  ανήκουν στον  $\mathbb{R}^3$  τότε η ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται από τον νόμο των συνημίτονων της τριγωνομετρίας:



Από τον νόμο των συνημίτονων για το τρίγωνο με κορυφή το  $O(0,0,0)$  και πλευρές τα διανύσματα  $x$  και  $y$  βρίσκουμε ότι :

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta \quad (1)$$

όπου  $\theta$  η γωνία των  $x$  και  $y$ . Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου η (1) μετά

από πράξεις γίνεται:  $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cos \theta$ .

Συνεπώς  $|\cos \theta| = \frac{|x \cdot y|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \Leftrightarrow |x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

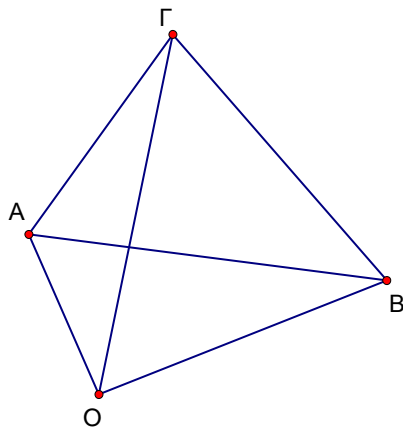
Αν τα  $x$  και  $y$  είναι συγγραμμικά, δηλαδή αν  $y = \lambda x$  για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{R}$  τότε  $\theta = 0$  ή  $\pi$ , άρα  $|\cos \theta| = 1$  και έτσι  $|x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$ .

Αν τα  $x$  και  $y$  δεν είναι συγγραμμικά (δηλαδή γραμμικά ανεξάρτητα) τότε  $\theta \in (0, \pi)$  και άρα  $|\cos \theta| < 1$ , επομένως  $|x \cdot y| < \|x\| \cdot \|y\|$

Έτσι καταλήγουμε στον τύπο για το εσωτερικό γινόμενο των μη μηδενικών διανυσμάτων  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta$ , όπου  $\theta \in [0, \pi]$  η μοναδική γωνία μεταξύ  $x$  και  $y$ .

Δύο διανύσματα  $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  λέγονται ορθογώνια αν  $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ .

**Παράδειγμα.** Έστω  $AB\Gamma$  το τρίγωνο με κορυφές  $A(1,1,8), B(4,-3,-4)$  και



$\Gamma(-3,1,5)$ . Να βρεθεί η γωνία  $\widehat{B\Gamma A} = \alpha$  του

τριγώνου. Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη γωνία

είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και

$\overrightarrow{A\Gamma}$  όπου  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

$(4, -3, -4) - (1, 1, 8) = (3, -4, -12)$  και

$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = (-3, 1, 5) - (1, 1, 8) = (-4, 0, -3)$

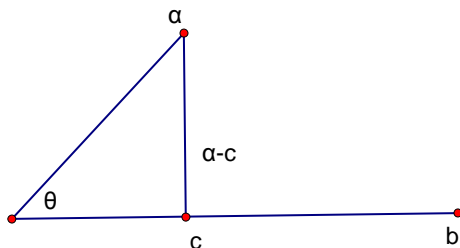
και  $O = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ . Επομένως

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{A\Gamma}\|} = \frac{3 \cdot (-4) + (-4) \cdot 0 + (-12) \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{25}} = \frac{24}{65}.$$

### Προβολές

Έστω  $a, b \in \mathbb{R}^3$  μη μηδενικά διανύσματα όπως στο σχήμα



Θα υπολογίσουμε το διάνυσμα προβολή  $c$  του  $a$  επί του  $b$  με χρήση του εσωτερικού γινομένου.

Παρατηρούμε ότι  $c = tb$  για κάποιο  $t \in \mathbb{R}$ . Επειδή το διάνυσμα  $a - c = a - tb$  είναι ορθογώνιο προς το  $b$  έχουμε

$$(a - tb) \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \cdot b - tb \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \cdot b - t \|b\|^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2}. \quad \text{Συνεπώς}$$

$$c = tb = \left( \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} \right) b$$

Το διάνυσμα  $c$  συμβολίζεται με  $proj_b a$ , συνεπώς  $proj_b a = \left( \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} \right) b$

Παρατηρούμε ότι  $proj_b a = \left( \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} \right) b = \left( \frac{a \cdot b}{\|b\|} \right) \frac{b}{\|b\|}$  και το διάνυσμα  $\frac{b}{\|b\|}$  είναι ομόρροπο

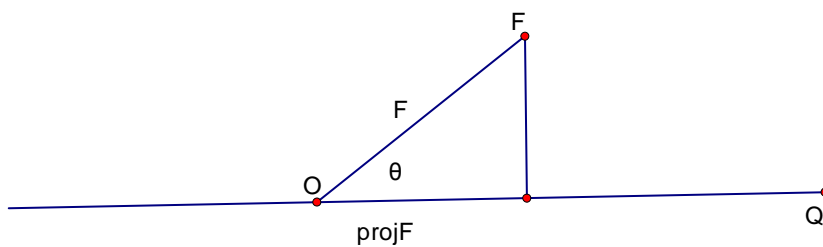
με το  $b$  και έχει μήκος ίσο με 1. Ο αριθμός  $\frac{a \cdot b}{\|b\|}$  ονομάζεται και βαθμωτή προβολή

του  $a$  επί του  $b$  και συμβολίζεται με  $comp_b a$ . Έπεται ότι

$$comp_b a = \frac{a \cdot b}{\|b\|} = \frac{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \theta}{\|b\|} = \|a\| \cdot \cos \theta. \text{ Άρα το μήκος της προβολής του } a \text{ επί του}$$

$$b \text{ ισούται με } |comp_b a| = \|a\| \cdot |\cos \theta|$$

Το έργο της δύναμης ως εσωτερικό γινόμενο: Το έργο  $W$  που παράγεται από μια σταθερή δύναμη  $F$  η οποία δρα πάνω σε ένα αντικείμενο, το οποίο μετακινείται κατά



μήκος της ευθείας ( $\epsilon$ ), από το σημείο  $O$  στο σημείο  $Q$  ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο  $W = \vec{F} \cdot \vec{OQ}$ .

$$\text{Επομένως } W = \|F\| \cdot \|OQ\| \cdot \cos \theta = (\|F\| \cdot \cos \theta) \cdot \|OQ\| = (comp_{OQ} F) \cdot \|OQ\|$$

Το εμβαδόν παραλληλογράμμου:

Αν  $a, b \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , το παραλληλόγραμμο που παράγεται από τα διανύσματα  $a$

και  $b$  είναι το σύνολο

$$\Pi = \{ \lambda a + \mu b : 0 \leq \lambda, \mu \leq 1 \} \subseteq \mathbb{R}^2. \text{ Από το}$$

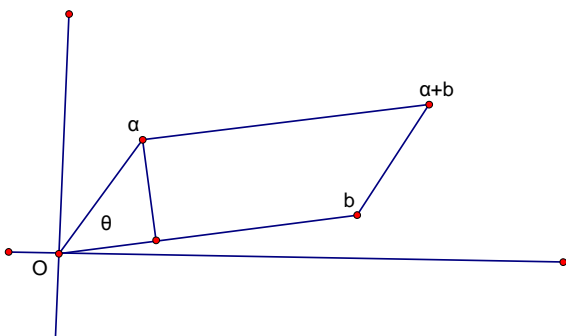
σχήμα έπεται ότι το εμβαδόν  $E$  του  $\Pi$  ισούται

$$\text{με } E = \|b\| \cdot \|a\| \cdot \sin \theta = \|b\| \cdot \|a\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} =$$

$$\|b\| \cdot \|a\| \sqrt{1 - \left( \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|} \right)^2} =$$

$$\frac{\|b\| \cdot \|a\| \sqrt{\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a \cdot b)^2}}{\|a\| \cdot \|b\|} =$$

$$\sqrt{\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a \cdot b)^2} \quad (1)$$



Αν  $a = (a_1, a_2)$  και  $b = (b_1, b_2)$  τότε επειδή ισχύει η ταυτότητα του Lagrange:  $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$ . Έπεται σε συνδυασμό με την (1) ότι

$$E = |a_1b_2 - a_2b_1| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right|. \text{ Το ανάλογο αυτού του αποτελέσματος ισχύει και}$$

στις τρεις διαστάσεις, η απόδειξή του αφήνεται ως άσκηση.

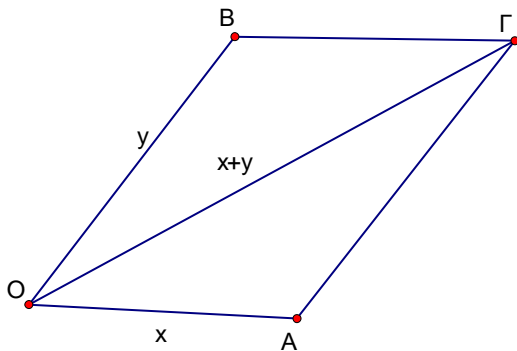
Σημειώνουμε ότι η γενική μορφή της ταυτότητας Lagrange θα αποδειχθεί λίγο αργότερα ( στην παράγραφο όπου ορίζεται το Εξωτερικό γινόμενο στον  $R^3$  ).

Μια πολύ ενδιαφέρουσα συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz είναι η τριγωνική

ανισότητα:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  για κάθε

$x, y \in R^n$ . Η ανισότητα αυτή είναι γεωμετρικά προφανής στην περίπτωση του  $R^2$  ( $n = 2$ ). Αφού η κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο άλλων. Γεωμετρικά έπεται ότι  $\|OG\| \leq \|OA\| + \|OB\|$ .

Δίνουμε τώρα μια αναλυτική απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας που βασίζεται στην ανισότητα Cauchy-Schwarz.



**1.3. Πρόταση:** Αν  $x, y \in R^n$  τότε  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Απόδειξη:** Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:  $x \cdot y \leq |x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Έπεται ότι,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Άρα παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες συμπεραίνουμε την ζητούμενη ανισότητα.

**Άσκηση:** Αποδείξτε ότι  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$  για  $x, y \in R^n$

**Απόδειξη:** Γράφουμε  $x = (x - y) + y$  (1),  $y = (y - x) + x$  (2)

Από την (1) έπεται ότι  $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$  και άρα  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$  (3)

Ανάλογα από την (2) έπεται ότι  $\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|$  και συνεπώς  $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$  (4)

Από τις (3) και (4) έπεται η ζητούμενη ανισότητα.

**Παρατήρηση:** Συνοψίζοντας έχουμε ότι οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης «μήκους»  $\|\cdot\|: R^n \rightarrow R$  που ορίσαμε στον  $R^n$  είναι οι ακόλουθες:

(α)  $\|x\| \geq 0$  και  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(β)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,  $\lambda \in R, x \in R^n$  και

(γ)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $x, y \in R^n$  ( τριγωνική ανισότητα ).

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μήκους η Ευκλείδεια νόρμα στον  $R^n$  έχει ιδιότητες ανάλογες με αυτές της απόλυτης τιμής στον  $R$  (εξάλλου αν  $n=1$  τότε  $\|x\|=|x|$  για κάθε  $x \in R$ ). Έτσι μπορούμε να ορίσουμε ως απόσταση μεταξύ δύο σημείων  $x$  και  $y$  του  $R^n$  το μήκος του διανύσματος  $x-y$ , δηλαδή  $d(x,y)=\|x-y\|$ . Η έννοια αυτή της απόστασης είναι που μας επιτρέπει, να ορίσουμε τις έννοιες, του ορίου ακολουθίας και γενικότερα, του ορίου συνάρτησης στον  $R^n$  κατά αναλογία με το  $R$  ( $n=1$ ).

### Παραδείγματα

1. Έστω  $a=(a_1, \dots, a_n) \in R^n$ . Να υπολογιστεί το  $\sup\{a_1x_1 + \dots + a_nx_n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ .

**Λύση :** Από την ανισότητα C-S έχουμε:  $a \cdot x \leq |a \cdot x| \leq \|a\| \cdot \|x\| \leq \|a\|$ , εφόσον  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 1$ . Έτσι το σύνολο  $A = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  που δεν είναι κενό είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό  $\|a\|$  και συνεπώς  $\sup A = M \leq \|a\|$ .

Αν  $a=0 \Leftrightarrow a_i=0$  για κάθε  $i=1,2,\dots,n$  τότε βέβαια  $A=\{0\}$  και άρα  $M = \sup A = 0$ .

Υποθέτουμε ότι  $a \neq 0$ , τότε θέτουμε  $x = \frac{a}{\|a\|}$  και παρατηρούμε ότι  $\|x\| = \frac{\|a\|}{\|a\|} = 1$ , άρα

$$a \cdot x = a \cdot \frac{a}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

Έπεται ότι  $\max A = \|a\|$  δηλαδή

$$M = \|a\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Σημείωση. Η βασική ιδέα εδώ είναι ότι ισότητα έχουμε στην ανισότητα C-S ακριβώς αν τα διανύσματα  $a$  και  $x$  είναι συγγραμμικά, δηλαδή αν  $x = \lambda a$  για κάποιο  $\lambda \in R$ . Από εδώ προκύπτει και η

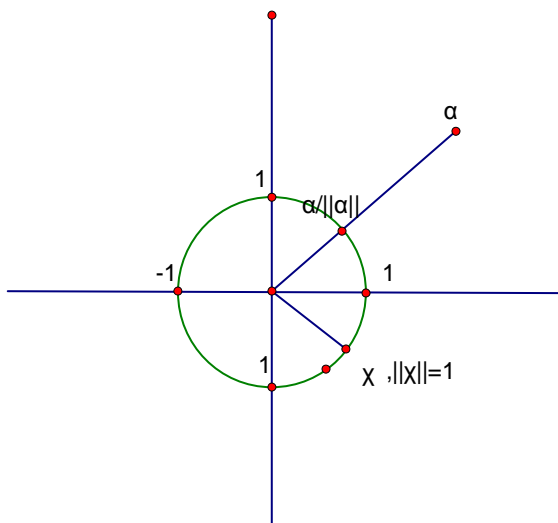
τιμή του  $\lambda \left( = \frac{1}{\|a\|} \right)$ . (Εφόσον θα έχουμε

$$\begin{aligned} |x \cdot a| &= |\lambda a \cdot a| = |\lambda| a \cdot a = |\lambda| \|a\|^2 = \|x\| \cdot \|a\| \\ &= 1 \cdot \|a\| = \|a\| \Rightarrow |\lambda| \|a\|^2 = \|a\| \Rightarrow |\lambda| = \frac{1}{\|a\|} \end{aligned}$$

Με παρόμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι:  $\min A = -\|a\|$ .

2) Έστω  $a=(a_1, \dots, a_n) \in R^n$ . Να υπολογιστεί το  $\sup\{a_1x_1 + \dots + a_nx_n : \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2 = 1\}$ , όπου  $\lambda_i > 0, i=1,2,\dots,n$  είναι δοσμένοι θετικοί αριθμοί.

**Λύση.** Αν  $a=0 \Leftrightarrow a_i=0$  για κάθε  $i=1,2,\dots,n$  τότε το σύνολο  $A = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n : \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2 = 1\}$  είναι προφανώς το μονοσύνολο  $A = \{0\}$  και συνεπώς  $\sup\{0\} = 0$ . Υποθέτουμε λοιπόν ότι  $a \neq 0$ . Θέτουμε



$y_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot x_i = x_i \cdot \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\lambda_i}}, i = 1, 2, \dots, n.$  Έπεται ότι:

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = (x_1 \sqrt{\lambda_1})^2 + (x_2 \sqrt{\lambda_2})^2 + \dots + (x_n \sqrt{\lambda_n})^2 = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 1.$$

Παρατηρούμε ότι,  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = a_1 \frac{y_1}{\sqrt{\lambda_1}} + \dots + a_n \frac{y_n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot y_1 + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot y_n.$  Άρα

ζητούμε το supremum των ποσοτήτων  $\frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot y_1 + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot y_n$  κάτω από την συνθήκη

$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1.$  Από την προηγούμενη άσκηση το supremum αυτό ισούται με

$$\left\| \left( \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right) \right\| = \sqrt{\frac{a_1^2}{\lambda_1} + \dots + \frac{a_n^2}{\lambda_n}}$$