Ασκήσεις

1) Έστω X διανυσματικός χώρος, $C \subseteq X$ κυρτό και $x \in C$.

(α) Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (ι) $x \in ex(C)$, (ιι) $x_1, x_2 \in C$ και $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow x = x_1 = x_2$ και (ιιι) Το σύνολο $C \setminus \{x\}$ είναι κυρτό.

(β) Επίσης αποδείξτε ότι αν $x \in ex(C)$ και $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ με $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $\lambda_k \geq 0$ και $x_k \in C$, $k = 1, 2, ..., n$, τότε $x = x_k$ για κάποιο $k \leq n$.

[Υπόδειξη. Για το (β) $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2\right) + \lambda_3 x_3$.
Χρησιμοποιείστε επαγωγή στο n.]

2) Έστω X τ.δ.χ. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό τότε $ex(\mathrm{K}) \subseteq Bd\mathrm{K}$ και επί πλέον το $Bd\mathrm{K}$ είναι ακραίο υποσύνολο του $\overline{\mathrm{K}}$, όπου $Bd\mathrm{K} = \overline{\mathrm{K}} \cap \overline{X - \mathrm{K}}$ (= το σύνορο του K).

(β) Αν X χώρος με νόρμα και $C \subseteq \hat{\mathrm{B}}_X$ είναι ακραίο υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ με $C \neq \hat{\mathrm{B}}_X$ τότε $C \subseteq S_X$.

[Υπόδειξη Πρβλ. την άσκηση 11 της παραγράφου 3.1 για το (α)].

3) Έστω X πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και $\mathrm{K} \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό Αν $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{K}$, αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) $\mathrm{K} = \overline{co}(\mathrm{E})$ και (ιι) για κάθε $f \in X^* \Rightarrow \sup_{x \in \mathrm{K}} f(x) = \sup_{x \in \mathrm{E}} f(x)$.

4) Έστω X, Y τοπικά κυρτοί χώροι, $\mathrm{K} \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό και $T : X \to Y$ γραμμική και συνεχής. Τότε κάθε ακραίο σημείο του $T(\mathrm{K})$ είναι εικόνα κάποιου ακραίου σημείου του K.

[Υπόδειξη: Το $T(\mathrm{K})$ είναι βέβαια συμπαγές και κυρτό. Έστω $y \in ex(T(\mathrm{K}))$. Το σύνολο $\mathrm{K}_y = \{x \in \mathrm{K} : T(x) = y\} = T^{-1}(\{y\}) \cap \mathrm{K}$ είναι συμπαγές και κυρτό, επομένως έχει ακραία σημεία. Έστω x_0 ακραίο σημείο του K_y. Δείξτε ότι το x_0 είναι ακραίο σημείο του K.]

5) Έστω X τοπικά κυρτός χώρος και $\mathrm{B} \neq \varnothing$ υποσύνολο του X ώστε $C = \overline{co}(\mathrm{B})$ είναι συμπαγές. Τότε $ex(C) \subseteq \overline{\mathrm{B}}$.

[<u>Περιγραφή της απόδειξης</u>. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το B είναι κλειστό και άρα συμπαγές.

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι αν U είναι τυχούσα κλειστή κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του $0 \in X$, τότε $ex(C) \subseteq \mathrm{B}+U$ (πρβλ. την Πρόταση 3.1.2 (vι)) .Έστω U μια τέτοια περιοχή. Επειδή το B είναι συμπαγές μπορεί να καλυφθεί από ένα πεπερασμένο πλήθος συνόλων x_k+U όπου $x_k \in \mathrm{B}$, $k=1,2,\dots,n$. Τα σύνολα $\mathrm{B}_k = \overline{co}\left(\mathrm{B} \bigcap \left(x_k+U\right)\right)$ είναι κυρτά και συμπαγή, επομένως το $co\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k\right)$ είναι κυρτό το οποίο περιέχεται στο C. Αποδεικνύεται εύκολα ότι το $co\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k\right)$ είναι συμπαγές (πράγματι το κυρτό σύνολο $co\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k\right)$ είναι συμπαγές ως εικόνα του συμπαγούς $\Omega = \mathrm{B}_1 \times \dots \times \mathrm{B}_n \times S_n$ μέσω της συνεχούς απεικόνισης $\varphi\left(y_1,\dots,y_n,t_1,\dots,t_n\right) = \sum_{k=1}^{n} t_k y_k$, όπου $S_n = \left\{\left(t_1,\dots,t_n\right) \in R^n : t_k \ge 0, \sum_{k=1}^{n} t_k = 1\right\}$) και επειδή περιέχει το B συμπεραίνουμε ότι $C = co\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k\right)$. Αν $x \in ex(C)$ τότε $x = \sum_{k=1}^{n} t_k b_k$, όπου $b_k \in \mathrm{B}_k$, $t_k \ge 0$, $k=1,2,\dots,n$ και $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$.

Έπεται από την άσκηση 1 (β) ότι $x = b_k$ για κάποιο $k \le n$.

Επομένως $x \in \mathrm{B}_k \subseteq x_k + U$, αφού το x_k+U κλειστό κυρτό και έτσι $x \in \mathrm{B}+U$. Δηλαδή $ex(C) \subseteq \mathrm{B}+U$. (Πρβλ. επίσης την άσκηση 9)]

6) Έστω K κυρτό υποσύνολο του R^n. Αποδείξτε ότι είτε $\mathrm{K}^0 \neq \varnothing$ ή το K περιέχεται σε ένα γνήσιο διανυσματικό υπόχωρο του R^n.

[<u>Υπόδειξη.</u> Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in \mathrm{K}$. Έστω Y η γραμμική θήκη του K και $\left\{e_1,\dots,e_m\right\}$ μια βάση του Y η οποία περιέχεται στο K. Προφανώς $m \le n$. Αν $m<n$ τότε βέβαια το K έχει κενό εσωτερικό. Υποθέτομε ότι $m=n$ και θα αποδείξουμε ότι $D^0 \neq \varnothing$. Έστω $C = co\left(\left\{e_k : k \le m = n\right\} \bigcup \left\{0\right\}\right) \subseteq \mathrm{K}$. Παρατηρούμε ότι το κυρτό σύνολο $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k e_k : 0 \le a_k \le \frac{1}{n}, k=1,2,\dots,n\right\} \subseteq C$. Έστω $x_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} e_n$. Τότε το $\mathrm{B} = \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k e_k : \left|a_k - \frac{1}{2n}\right| < \frac{1}{2n}\right\}$ είναι μια ανοικτή περιοχή του x_0 και $\mathrm{B} \subseteq C \subseteq \mathrm{K}$. Πρβλ επίσης την άσκηση 12 των παραγράφων 3.2, 3.3]

7) <u>Θεώρημα Καραθεοδωρή</u>: Έστω K ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του R^n. Τότε κάθε $x \in \mathrm{K}$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός το πολύ $n+1$ ακραίων σημείων του K.

[Περιγραφή της απόδειξης. Προχωρούμε με επαγωγή στην διάσταση n του χώρου. Αν $n=1$, τότε $\mathrm{K}=[a,b]\subseteq R$ και το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτομε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για χώρους διάστασης $n-1$, όπου $n\geq 2$. Έστω $\mathrm{K}\subseteq R^n$ κυρτό με $\mathrm{K}^0\neq\varnothing$ (άσκηση 6) και $x\in\mathrm{K}$. (α) Αν το $x\in Bd\mathrm{K}=\mathrm{K}\setminus\mathrm{K}^0$ θεωρούμε ένα

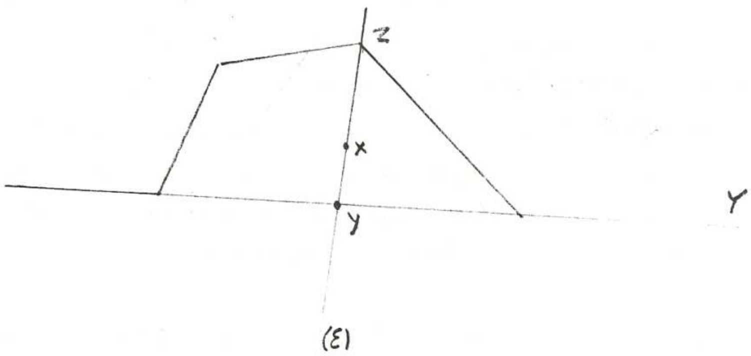
(συσχετισμένο) υπερεπίπεδο Y του R^n που διέρχεται από το x και αφήνει το K σε έναν από τους δύο ημιχώρους που ορίζει το Y (θεώρημα Hahn-Banach στις πεπερασμένες διαστάσεις).

Η τομή του K με το Y είναι ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του K που είναι ακραίο υποσύνολο του K και βέβαια έχει κενό εσωτερικό. Το συμπέρασμα έπεται από την επαγωγική υπόθεση καθώς $\dim Y=n-1$.

(β) Αν $x\in\mathrm{K}^0$, θεωρούμε ένα ακραίο σημείο z του K και την ευθεία (ε) που διέρχεται από τα z και x. Η (ε) τέμνει το $Bd\mathrm{K}$ σε ένα σημείο y. Θεωρούμε όπως στην περίπτωση (α) ένα υπερεπίπεδο Y που διέρχεται από το y και αφήνει το K σε ένα από τους δύο ημιχώρους που ορίζει το Y. Έστω $\mathrm{B}=\mathrm{K}\bigcap Y$. Τότε το B είναι συμπαγές κυρτό ακραίο υποσύνολο του K. Αν το B είναι μονοσύνολο, τότε είναι ακραίο σημείο του K

($\mathrm{B}=\{y\}$) και το x είναι κυρτός συνδυασμός των z και y (δύο ακραίων σημείων του K)

Αν $|\mathrm{B}|\geq 2$, τότε επειδή $\dim Y<n$ από την επαγωγική υπόθεση το $y\in\mathrm{B}$ είναι κυρτός συνδυασμός το πολύ n ακραίων σημείων του B, άρα και του K. Επειδή το x είναι κυρτός συνδυασμός των z και y έπεται το συμπέρασμα.]



8) Έστω X διανυσματικός χώρος $\mathrm{K}\subseteq X$ κυρτό και $f:X\to R$ συνάρτηση. Η f λέγεται κυρτή αν $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathrm{K}$ και κάθε $\lambda\in[0,1]$. Έστω $f:\mathrm{K}\to R$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) $f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$, όπου $x_1,\dots,x_n\in\mathrm{K}$ και $\lambda_k\geq 0$, $k=1,2,\dots,n$ ώστε $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$.

(β) Αν $X = R^n$, $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό συμπαγές και η $f : X \to R$ συνεχής κυρτή συνάρτηση τότε η f επιτυγχάνει την μέγιστη τιμή της σε ένα ακραίο σημείο του K.

[Υπόδειξη: Για το (β) . Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Καραθεοδωρή (άσκηση 7).]

9) Έστω X τ.δ.χ. και $\mathrm{B}_1,\ldots,\mathrm{B}_n$ κυρτά και συμπαγή υποσύνολα του X τότε η κυρτή θήκη $co\left(\bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{B}_k\right)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X .

[Υπόδειξη. Το σύνολο $\mathrm{A} = \left\{\sum_{k=1}^{n} t_k y_k : t_k \geq 0, y_k \in \mathrm{B}_k, k \leq n, \sum_{k=1}^{n} t_k = 1\right\}$ είναι κυρτό και προφανώς περιέχεται στο $co\left(\bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{B}_k\right)$. Επειδή A κυρτό και $\mathrm{B}_k \subseteq \mathrm{A}$ για κάθε $k = 1,2,\ldots,n$, έπεται ότι $\mathrm{A} = co\left(\bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{B}_k\right)$.

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\Phi : \mathrm{B}_1 \times \ldots \times \mathrm{B}_n \times S_n \to \mathrm{A}$ η οποία ορίζεται στην απόδειξη της άσκησης 5, είναι συνεχής και επί του A]

10) Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται γνήσια κυρτός (ή η νόρμα του X λέγεται γνήσια κυρτή) αν $\|tx + (1-t)y\| < 1$, οποτεδήποτε x και y είναι διαφορετικά σημεία της S_X και $0 < t < 1$. Για ένα χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Ο X είναι γνήσια κυρτός αν και μόνο αν κάθε $x \in S_X$ είναι ακραίο σημείο της, αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in X$ ώστε, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ έπεται ότι τα διανύσματα x και y ανήκουν στην ίδια ημιευθεία από το $0 \in X$. (Δηλαδή το ένα από τα δύο είναι μη αρνητικό πολλαπλάσιο του άλλου.)

(β) Συμπεράνατε ότι ο χώρος Banach ℓ_p, $1 < p < +\infty$ είναι γνήσια κυρτός και ότι οι ℓ_1, ℓ_∞ και c_0 δεν είναι γνήσια κυρτοί.

[Υπόδειξη. Για το (α). Το γεγονός ότι ο X είναι γνήσια κυρτός αν και μόνο αν κάθε $x \in S_X$ είναι ακραίο σημείο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ έπεται αμέσως από τους αντίστοιχους ορισμούς. Έστω ότι ο X είναι γνήσια κυρτός και ότι $x, y \in X$ με $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Μπορούμε να υποθέσομε ότι $1 = \|x\| \leq \|y\|$. Έστω $z = \frac{y}{\|y\|}$. Τότε $2 \geq \|x+z\| = \left\|x + y - \left(1 - \frac{1}{\|y\|}\right)y\right\|$

$\geq \|x+y\| - \left(1 - \frac{1}{\|y\|}\right)\|y\| = \|x\| + \|y\| - \|y\| + 1 = 2$. Άρα $\frac{\|x+z\|}{2} = 1$. Επειδή $x, z \in S_X$, έπεται ότι $x = z = \frac{y}{\|y\|}$. Αντιστρόφως αν x και y είναι διαφορετικά στοιχεία της S_X τότε τα x και y δεν μπορεί να ανήκουν στην ίδια ημιευθεία από το $0 \in X$, από όπου έπεται ότι $\|x+y\| < \|x\| + \|y\| = 2$ και άρα $\frac{\|x+y\|}{2} < 1$ και ο χώρος είναι γνήσια κυρτός.]

11) (α) Έστω X και Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός $1-1$ τελεστής. Αποδείξτε ότι αν ο Y είναι γνήσια κυρτός τότε ο X δέχεται ισοδύναμη γνήσια κυρτή νόρμα.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach X δέχεται ισοδύναμη γνήσια κυρτή νόρμα.

[Υπόδειξη. Για το (α) . Έστω $\|\cdot\|_1$ η νόρμα του X και $\|\cdot\|_2$ η γνήσια κυρτή νόρμα του Y. Θέτομε $\|x\| = \|x\|_1 + \|T(x)\|_2$, $x \in X$. Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι μια γνήσια κυρτή ισοδύναμη νόρμα επί του χώρου X. Για το (β). Έστω $\{x_n^* : n \geq 1\}$ μια ασθενώς * πυκνή ακολουθία στην $\hat{B}_{X^*}$. Ορίζουμε έναν τελεστή $T : X \to \ell_2$ θέτοντας $T(x) = \left(\frac{x_n^*(x)}{n}\right)_{n \geq 1}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι γραμμικός φραγμένος και $1-1$. Επειδή ο χώρος Hilbert είναι γνήσια κυρτός, από το (α) έχουμε το συμπέρασμα. Πρβλ επίσης και την απόδειξη του Λήμματος 4.2.5].

12) Έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του Ευκλειδείου επιπέδου R^2. Αποδείξτε ότι το σύνολο $ex(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του K.

[Υπόδειξη. Αν $K^0 = \varnothing$ τότε το K περιέχεται σε μια ευθεία του R^2 (άσκηση 6) και το αποτέλεσμα είναι προφανές. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K^0 \neq \varnothing$. Από την άσκηση 2 έχουμε ότι $ex(K) \subseteq Bd K$. Αποδείξτε ότι το $ex(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του (συμπαγούς συνόλου) $Bd K$.]