Ασκήσεις

1) Έστω X χώρος Banach. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη και $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(β) Αν η (x_n^*) είναι ακολουθία στον X^* και $x^* \in X^*$ ώστε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε η (x_n^*) είναι φραγμένη και $\|x^*\| \leq \liminf \|x_n^*\|$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Για το (α): Από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος η (x_n) είναι φραγμένη. Έστω $c = \liminf \|x_n\|$. Αν $\|x^*\| \leq 1$ τότε $|x^*(x)| = \lim |x^*(x_n)| \leq \liminf (\|x^*\| \cdot \|x_n\|)$ $= \|x^*\| \cdot \liminf \|x_n\| \leq \liminf \|x_n\| = c$. Η απόδειξη για το (β) είναι παρόμοια]

2)Έστω X χώρος με νόρμα. Αν η ακολουθία (x_n) είναι norm Cauchy και $x_n \xrightarrow{w} x$ τότε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

[<u>Υπόδειξη</u> $x_n \in x_m + \varepsilon \hat{B}_X$ και το σύνολο $x_m + \varepsilon \hat{B}_X$ είναι ασθενώς κλειστό.]

3) Έστω (x_n) ακολουθία στον χώρο Banach X, όπου $X = \ell_p$ ή c_0 ($1 \leq p < +\infty$). Έστω $x_n = (x_{nk})_{k \geq 1}$, $n \in N$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $X = \ell_p$, $1 < p < +\infty$ ή c_0 τότε: $x_n \xrightarrow{w} 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\| \leq M, n \geq 1$ και $x_{nk} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ για κάθε $k \in N$.

(β) Αν $X = \ell_1 = c_0^*$ τότε: $x_n \xrightarrow{w^*} 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\|_1 \leq M$, $n \geq 1$ και $x_{nk} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ για κάθε $k \in N$.

[<u>Υπόδειξη</u> Η ακολουθία $e_n, n \geq 1$ είναι ολικό υποσύνολο του X].

4) Έστω $X = \ell_1 \cong c_0^*$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (e_n) ικανοποιεί την $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ αλλά όχι την $e_n \xrightarrow{w} 0$

[<u>Υπόδειξη</u> Για το δεύτερο ερώτημα αποδείξτε πρώτα ότι $0 \notin \overline{co}\{e_n, n \geq 1\}$]

5) Αποδείξτε ότι στον χώρο Banach ℓ_∞ το σύνολο $K = \{e_n : n \geq 1\} \cup \{0\}$ είναι ασθενώς συμπαγές αλλά όχι norm συμπαγές.

[<u>Υπόδειξη</u> $\{e_n : n \geq 1\} \subseteq c_0 \subseteq \ell_\infty$].

6) Έστω $X = c_0$ ή ℓ_p ($1 < p < +\infty$). Αποδείξτε ότι η ασθενής τοπολογία στην $\hat{B}_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ είναι μετρικοποιήσιμη και ότι συμπίπτει με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο επί του N. Επίσης αποδείξτε ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$.

7) Έστω $F : \ell_1 \to R$ ώστε $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x = (x_k) \in \ell_1$. Αποδείξτε ότι η F είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές επί του ℓ_1 και ακόμη ότι δεν είναι ασθενώς* συνεχές επί του $\ell_1 \cong c_0^*$ (δηλαδή ότι $F \in \ell_\infty \setminus c_0$).

[Υπόδειξη Από την άσκηση (4) έχουμε ότι $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ στον ℓ_1)]

8) Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η S_X είναι πυκνό υποσύνολο της $\left(\hat{B}_X, w\right)$ άρα και ασθενώς* πυκνό υποσύνολο της $\hat{B}_{X^{**}}$

(β) Η νόρμα του X δεν είναι ασθενώς συνεχής σε κανένα σημείο του X.

[Υπόδειξη Για το (α): Έστω $\|x_0\| < 1$ και έστω $B_F(x_0, \varepsilon)$ μια ασθενώς ανοικτή βασική περιοχή του x_0, όπου $F \subseteq X^*$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$. Τότε $x_0 + \bigcap_{x^* \in F} Kerx^* \subseteq B_F(x_0, \varepsilon)$. Ο διανυσματικός υπόχωρος $M = \bigcap_{x^* \in F} Kerx^*$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση και συνεπώς $M \ne \{0\}$. Έστω $x_1, x_2 \in M$ ώστε $\|x_0 + x_1\| < 1$ και $\|x_0 + x_2\| > 1$. Παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[x_0 + x_1, x_0 + x_2] \subseteq x_0 + M \subseteq B_F(x_0, \varepsilon)$ και ότι τέμνει την S_X

Για το (β): Από το (α) υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ στην S_X ώστε $x_\delta \xrightarrow{w} 0$. Άρα η $\|\cdot\|$ δεν είναι ασθενώς συνεχής στο 0. Αν $x \ne 0$, τότε το $y = \frac{x}{1 + \|x\|}$ έχει $\|y\| < 1$. Αν $\lambda = 1 + \|x\|$ τότε από το (α) υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ στην S_X ώστε $x_\delta \to y = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \lambda x_\delta \xrightarrow{w} x$. Από όπου συμπεραίνουμε ότι η $\|\cdot\|$ δεν είναι ασθενώς συνεχής στο x.]

9) Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι: (α) Αν $K \subseteq X$, τότε το K είναι norm φραγμένο αν και μόνο αν το K είναι ασθενώς φραγμένο.

(β) Αν ο X είναι χώρος Banach και $K \subseteq X^*$, τότε το K είναι norm φραγμένο αν και μόνο αν είναι ασθενώς * φραγμένο.

[Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος].

10) Έστω X χώρος Banach και $K \subseteq X^*$, αποδείξτε ότι το K είναι ασθενώς συμπαγές* αν και μόνο αν είναι ασθενώς* κλειστό και norm φραγμένο.

11) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα . Αποδείξτε ότι ο X εμφυτεύεται ισομετρικά σ' ένα χώρο Banach της μορφής $C(\Omega)$ όπου Ω συμπαγής χώρος.

[<u>Υπόδειξη</u> Έστω $\Omega = \left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$. Ορίζουμε $T : X \to C(\Omega)$ ώστε $T(x)(x^*) = x^*(x), x \in X, x^* \in \Omega$. Αποδείξτε ότι η T είναι γραμμική ισομετρία.]

12) Έστω X χώρος με νόρμα και $K \subseteq X$ φραγμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι το K είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν η ασθενής* κλειστότητα του στον X^{**} περιέχεται στον X (δηλαδή $c\ell_{w^*} K \subseteq X$).

13) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος Banach και (x_n) πυκνή ακολουθία στην $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Ορίζουμε $T : X^* \to \ell_2 : T(x^*) = \left(\dfrac{x^*(x_n)}{2^n}\right)_{n \ge 1}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι ένας γραμμικός φραγμένος και $1-1$ τελεστής ο οποίος είναι ασθενώς *-ασθενώς συνεχής όταν περιορισθεί στην $\hat{B}_{X^*}$.

14) (α) Έστω X, Y χώροι Banach και $1 \le p < +\infty$. Θέτομε $Z = (X \oplus Y)_p$ (= το ευθύ άθροισμα των X και Y στην $p-$νόρμα). Αποδείξτε ότι $Z^* \cong (X^* \oplus Y^*)_q$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.

(β) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach ώστε ο X να είναι ισομορφικός με τον συζυγή του X^*. Είναι τότε ο X ισομορφικός με κάποιο χώρο Hilbert;

[<u>Υπόδειξη</u>. Η απόδειξη του (α) είναι παρόμοια με την απόδειξη του δυϊσμού των χώρων ℓ_p, δηλαδή $\ell_p^* = \ell_q$, $\ell_1^* = \ell_\infty$. Για το (β) παρατηρούμε ότι αν X είναι αυτοπαθής χώρος Banach (μη ισομορφικός με χώρο Hilbert) και $Y = (X \oplus X^*)_2$, τότε από το (α) έχουμε ότι $Y^* \cong (X^* \oplus X^{**})_2 = (X^* \oplus X)_2 \cong Y$.]

15) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Τότε $\left(\hat{B}_X, w\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος (διαχωρίσιμος) χώρος αν και μόνο αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

[<u>Υπόδειξη</u>. Έχουμε ήδη αποδείξει την κατεύθυνση, X^* διαχωρίσιμος τότε $\left(\hat{B}_X, w\right)$ μετρικοποιήσιμος (και διαχωρίσιμος) χώρος. (πρβλ. Πόρισμα 4.1.9). Έστω ότι η $\left(\hat{B}_X, w\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος. Θεωρούμε μια ακολουθία $B_{F_n}(0,\varepsilon_n), n \geq 1$ ασθενώς ανοικτών βασικών περιοχών του $0 \in X$ (F_n πεπερασμένο υποσύνολο του X^* και $\varepsilon_n > 0, n \in N$) ώστε η ακολουθία $U_n = B_{F_n}(0,\varepsilon_n) \bigcap \hat{B}_X, n \geq 1$, να είναι βάση περιοχών του 0 στον χώρο $\left(\hat{B}_X, w\right)$. Χωρίς περιορισμό, της γενικότητας υποθέτομε ότι $\varepsilon_n = 1, n \geq 1$ και θέτομε $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, Y = c\ell_{\|\cdot\|}\langle F \rangle$ (= η κλειστή γραμμική θήκη του F στον X^*). Θα αποδείξουμε ότι $Y = X^*$. Έστω $x^{**} \in X^{**}$ με $\|x^{**}\| \leq 1$ ώστε το x^{**} να μηδενίζεται επί του F. Από το θεώρημα Goldstine υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta\in\Delta} \subseteq \hat{B}_X$ ώστε $x_\delta \xrightarrow{w^*} x^{**}$. Έστω ότι δίδεται $n \in N$. Τότε υπάρχει $\delta_0 \in \Delta$ ώστε $\left|x^*(x_\delta)\right| = \left|x^*(x_\delta - x^{**})\right| < \varepsilon_n = 1$ για κάθε $\delta \geq \delta_0$ για κάθε $x^* \in F_n$. Έπεται ότι $x_\delta \in U_n$ για κάθε $\delta \geq \delta_0$. Επειδή αυτό γίνεται για κάθε $n \in N$, συμπεραίνουμε ότι $x_\delta \xrightarrow{w} 0$, επομένως $x^{**} = 0$.]

16) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach.

(α) Αποδείξτε ότι νόρμα $\|\cdot\|$ του X είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής συνάρτηση επί του X .

(β) Αποδείξτε ότι αν ο X είναι διαχωρίσιμος τότε κάθε υποσύνολο A του X είναι με την ασθενή (σχετική) τοπολογία διαχωρίσιμος χώρος.

(γ) Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για τον X : (ι) $\left(\hat{B}_X, w\right)$ είναι διαχωρίσιμος, (ιι) (S_X, w) είναι διαχωρίσιμος και (ιιι) X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

[<u>Υπόδειξη</u>. Για το (α). Κάθε κλειστή σφαίρα του X είναι από το θεώρημα Mazur ασθενώς κλειστό σύνολο. Για το (β). Η ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, w)$ είναι συνεχής. Για το (γ). (ι) $\Rightarrow$ (ιι). Έστω D αριθμήσιμο ασθενώς πυκνό υποσύνολο της $\hat{B}_X$ και $x \in S_X$, τότε υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta\in\Delta} \subseteq D : x_\delta \xrightarrow{w} x$. Επειδή από το (α) η νόρμα είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής $1 = \|x\| \leq \liminf_{\delta\in\Delta} \|x_\delta\|$, άρα $\|x_\delta\| \to 1$ (πρβλ και την άσκηση 1 (α)).

Έπεται ότι, $\frac{x_\delta}{\|x_\delta\|} \xrightarrow{w} x$. Άρα το σύνολο $\left\{ \frac{x}{\|x\|} : x \in D, x \neq 0 \right\}$ είναι αριθμήσιμο και ασθενώς πυκνό στην S_X. Η κατεύθυνση (ιι) $\Rightarrow$ (ι) έπεται από το γεγονός ότι η S_X είναι ασθενώς πυκνό υποσύνολο της $\hat{B}_X$ (πρβλ. άσκηση (8)). Για το (ι) $\Rightarrow$ (ιιι) παρατηρούμε ότι αν D είναι αριθμήσιμο και ασθενώς πυκνό υποσύνολο της $\hat{B}_X$ τότε το $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} nD$ είναι αριθμήσιμο και ασθενώς πυκνό υποσύνολο του X και έτσι ο X είναι ασθενώς διαχωρίσιμος. Έστω $D_1 = \langle L \rangle$ η γραμμική θήκη του L τότε το σύνολο S των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του L με ρητούς συντελεστές είναι norm πυκνό στο D_1, επομένως το D_1 είναι norm διαχωρίσιμο. Επειδή το D_1 είναι ασθενώς πυκνό κυρτό σύνολο (ως γραμμικός υπόχωρος) έπεται από τις συνέπειες του θεωρήματος Mazur ότι είναι και norm πυκνό στο X . Η κατεύθυνση (ιιι) $\Rightarrow$ (ι) είναι συνέπεια του (β).]

17) Στον χώρο Hilbert $L_2[0,2\pi]$, θεωρούμε την ακολουθία $f_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N^2} e^{\text{int}}, N \geq 1$.

Αποδείξτε ότι: (α) $f_N \xrightarrow{w} 0$ και (β) $\|g_N\|_2$ δεν τείνει στο 0, όπου $g_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n, N \geq 1$.

Συγκρίνετε αυτά τα αποτελέσματα με το θεώρημα Mazur.

[Περιγραφή της απόδειξης: Έστω $u_k(t) = e^{ikt}, t \in [0,2\pi], k \in Z$. Τότε $\|u_k\|_2^2 = 2\pi, k \in Z$ και $\langle u_n, u_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 2\pi, n = m \\ 0, \ \ n \neq m \end{cases}$. Έτσι το σύνολο $\left\{ \frac{u_k}{\sqrt{2\pi}} : k \in Z \right\}$ είναι ορθοκανονικό. Από το θεώρημα Weierstrass (ή Fejer) το σύνολο $\{u_k : k \in Z\}$ είναι ολικό υποσύνολο του χώρου Banach $C(T)$, όπου $\mathrm{T} = \{z \in C : |z| = 1\}$. Επειδή ο χώρος $C(T)$ είναι πυκνός στον χώρο Hilbert $L_2[0,2\pi]$ έπεται ότι το $\{u_k : k \in Z\}$ είναι ολικό στον $L_2[0,2\pi]$. Επομένως μια φραγμένη ακολουθία $(f_N) \subseteq L_2[0,2\pi]$ είναι ασθενώς μηδενική ακριβώς όταν $\langle f_N, u_k \rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ για κάθε $k \in Z$. Η δοσμένη (f_N) είναι βέβαια φραγμένη αφού, ($f_N(t) = \frac{1}{N} e^{it} \cdot \frac{e^{iN^2 t} - 1}{e^{it} - 1}, t \in [0,2\pi)$, $f_N(0) = f_N(2\pi) = N$ και)

$$\|f_N\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f_N|^2 dt = \frac{1}{N^2}\int_0^{2\pi} \left|u_1 + u_2 + \ldots + u_{N^2}\right|^2 dt = \frac{1}{N^2}\int_0^{2\pi} \left(|u_1|^2 + \ldots + |u_{N^2}|^2\right) dt =$$

$\frac{1}{N^2}\int_0^{2\pi} N^2 dt = 2\pi$, χρησιμοποιώντας ότι το $\left\{ \frac{u_k}{\sqrt{2\pi}} : k \in Z \right\}$ είναι ορθοκανονικό.

Παρατηρούμε ότι αν $k \in Z$ τότε για κάθε $N \geq k$, $\langle f_N, u_k \rangle = \frac{1}{N}\langle u_k, u_N \rangle = \frac{2\pi}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Άρα $f_N \xrightarrow[N\to\infty]{w} 0$.

Για το (β) παρατηρούμε τα ακόλουθα: $\|g_N\|_2^2 = \frac{1}{N^2}\int_0^{2\pi} |f_1 + \ldots + f_N|^2 dt \Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} |f_1 + \ldots + f_N|^2 dt = N^2.\|g_N\|_2^2 \qquad (1)$$

Επίσης έχουμε: $|f_1 + \ldots + f_N|^2 = (f_1 + \ldots + f_N)\cdot\overline{(f_1 + \ldots + f_N)} =$

$$(f_1 + \ldots + f_N)\cdot\left(\overline{f_1} + \ldots + \overline{f_N}\right) = \sum_{k=1}^{N}|f_k|^2 + \sum_{\substack{1\le k,\lambda\le N\\ k\ne\lambda}} f_k\cdot\overline{f_\lambda}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}|f_k|^2 + \sum_{1\le k<\lambda\le N} f_k\cdot\overline{f_\lambda} + \sum_{1\le k<\lambda\le N}\overline{f_k}\cdot f_\lambda \qquad (2)$$

Αν $1 \le k \le \lambda \le N$, τότε $f_k\cdot\overline{f_\lambda} = \frac{\left(u_1 + \ldots + u_{k^2}\right)}{k}\cdot\frac{\overline{\left(u_1 + \ldots + u_{\lambda^2}\right)}}{\lambda}$

$= \frac{1}{k\lambda}\left(u_1 + \ldots + u_{k^2}\right)\cdot\left(\overline{u_1} + \ldots + \overline{u_{\lambda^2}}\right)$. Λαμβάνοντας υπόψη την καθετότητα των u_i, u_j με $1 \le i \ne j \le \lambda^2$ συμπεραίνουμε ότι $\frac{1}{k\lambda}\int_0^{2\pi}\left(|u_1|^2 + \ldots + |u_{k^2}|^2\right)dt = 2\pi\frac{k^2}{k\lambda} = 2\pi\frac{k}{\lambda}$

$$\langle f_k, f_\lambda\rangle = \int_0^{2\pi} f_k\cdot\overline{f_\lambda}dt = \text{, άρα και } \int_0^{2\pi} f_\lambda\overline{f_k}dt = \langle f_\lambda, f_k\rangle = \overline{\langle f_k, f_\lambda\rangle} = 2\pi\frac{k}{\lambda} \qquad (3)$$

Έπεται από τις (1), (2) και (3) ότι $\int_0^{2\pi}|f_1 + \ldots + f_N|^2 dt =$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi}|f_k|^2 dt + 2\sum\left\{\int_0^{2\pi} f_k\overline{f_\lambda} : 1 \le k < \lambda \le n\right\} = 2\pi N + 4\pi\sum\left\{\frac{k}{\lambda} : 1 \le k < \lambda \le N\right\} \quad (4).$$

Θέτομε $I_N = \sum\left\{\frac{k}{\lambda} : 1 \le k < \lambda \le N\right\}, N \ge 2$ και παρατηρούμε ότι,

$$I_N = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{N}\right) + \ldots + \left(\frac{N-2}{N-1} + \frac{N-2}{N}\right) + \frac{N-1}{N}.$$

Επομένως $I_{2N} = A + B$, όπου $A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2N}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{2N}\right) + \ldots +$

$\left(\frac{N}{N+1} + \frac{N}{N+2} + \ldots + \frac{N}{2N}\right)$ και $B = \left(\frac{N+1}{N+2} + \frac{N+1}{N+3} + \ldots + \frac{N+1}{2N}\right) + \ldots + \frac{2N-1}{2N}$.

Αν $k \le N$, τότε $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2N} \ge \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$.

Κατά συνέπεια , $I_{2N} > A \ge \frac{1 + 2 + \ldots + N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{N(N+1)}{4}$ (5).

Έπεται από τις (4) και (5) ότι $\|g_{2N}\|_2^2 = \frac{1}{4N^2}\int_0^{2\pi}|f_1+...+f_{2N}|^2 dt = \frac{1}{4N^2}(4\pi N + 4\pi I_{2N})$

$$= \frac{\pi N + \pi I_{2N}}{N^2} > \frac{1}{N^2}\cdot I_{2N} > \frac{1}{N^2}\cdot\frac{N(N+1)}{4} = \frac{1}{4}\frac{N(N+1)}{N^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Έπεται ότι $\|g_{2N}\|_2$ δεν συγκλίνει στο 0 και συνεπώς $\|g_N\|_2$ δεν συγκλίνει στο 0.

Επειδή $f_N \xrightarrow{w} 0$, από το θεώρημα του Mazur υπάρχει ακολουθία κυρτών συνδυασμών μελών της (f_N) η οποία συγκλίνει norm στο 0. Από το (β) όμως συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (g_N) των μέσων όρων της (f_N) δεν έχει αυτή την ιδιότητα.

18) Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι: (α) Ο συζυγής τελεστής $T^*: Y^* \to X^*$ του T είναι συνεχής και για τις ασθενείς* τοπολογίες των Y^* και X^*.

(β) Αν ο T είναι ισομορφισμός μεταξύ των X και Y τότε και ο T^* είναι ισομορφισμός μεταξύ των X^* και Y^*.

(γ) Η προβολή $P: X^{***} \to X^*: P(f) = f|_X$, είναι συζυγής τελεστής.

[Υπόδειξη Για το (γ). Η P είναι η προβολή Dixmier (πρβλ. την άσκηση (6) της παραγράφου (2)). Δείξτε ότι $P = \varphi^*$, όπου $\varphi: X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}].

19) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι η

(α) Η νόρμα $\|\cdot\|$ του X^* είναι ασθενώς* κάτω ημισυνεχής.

(β) Αν $(x_i^*)_{i\in I}$ είναι φραγμένο δίκτυο στον X^* και $x^* \in X^*$ ώστε $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε $\|x^*\| \le \liminf \|x_i^*\|$.

20) Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε μη κενό ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X είναι προσεγγίσιμο. Ιδιαίτερα κάθε αυτοπαθής υπόχωρος του X είναι προσεγγίσιμος.

(β) Κάθε μη κενό ασθενώς* συμπαγές υποσύνολο του X^* είναι προσεγγίσιμο.

(γ) Αν Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και $\pi: X \to X/Y$ η κανονική απεικόνιση τότε, ο Y είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν ισχύει ότι, $\pi\left(\hat{B}_X\right) = \hat{B}_{X/Y}$.