## 4.2 Αυτοπάθεια και ασθενής συμπάγεια

Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται αυτοπαθής ( reflexive ), αν η κανονική εμφύτευση $\varphi : X \to X^{**} : \varphi(x)(x^*) = x^*(x)$, $x^* \in X^*$, $x \in X$ , είναι επί του $X^{**}$, δηλαδή $\varphi(X) = X^{**}$. Παρατηρούμε ότι ένας αυτοπαθής χώρος $X$ είναι αναγκαία χώρος Banach εφόσον ταυτίζεται ισομετρικά με τον $X^{**}$. Σημειώνουμε ότι υπάρχουν παραδείγματα μη αυτοπαθών χώρων $X$ έτσι ώστε ο $X$ να είναι γραμμικά ισομετρικός με τον $X^{**}$ ( όχι φυσικά μέσω της κανονικής απεικόνισης $\varphi$ ).

Ένα τέτοιο παράδειγμα (ο χώρος του James J) μπορεί να βρεθεί στα βιβλία [F-H-H-M-P-Z] και [M].

Θεώρημα 4.2.1 Έστω $X$ χώρος Banach. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

1) Ο $X$ είναι αυτοπαθής

2) Η $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι συμπαγής χώρος.

3) Ο $X^*$ είναι αυτοπαθής

4) $(X^*, w) = (X^*, w^*)$.

Απόδειξη (1) $\Rightarrow$ (2). Εφόσον ο $X$ είναι αυτοπαθής έχουμε ότι $(X, w) = (X^{**}, w^*)$ και άρα $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right) = \left(\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}, w^*\right)$. Από το θεώρημα Alaoglou έχομε το συμπέρασμα.

(2) $\Rightarrow$ (1) Εφόσον η $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι συμπαγής χώρος είναι και ασθενώς$^*$ συμπαγές υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$.

Από το θεώρημα Goldstine η $\hat{\mathrm{B}}_X$ είναι και ασθενώς$^*$ πυκνό υποσύνολο του $\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$, συνεπώς $\hat{\mathrm{B}}_X = \hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$. Άρα $X = X^{**}$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Η ασθενής τοπολογία επί του $X^*$ επάγεται από τον συζυγή του που είναι ο $X^{**} = X$ . Επίσης η ασθενής$^*$ τοπολογία επί του $X^*$ επάγεται από τον προσυζυγή του που είναι πάλι ο $X$ , έτσι οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται.

(4) $\Rightarrow$ (3). Από την υπόθεσή μας, έπεται αμέσως ότι $\left(\hat{B}_{X^*}, w\right) = \left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$. Από το θεώρημα Alaoglou η $\left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής χώρος. Άρα η $\left(\hat{B}_{X^*}, w\right)$ είναι συμπαγής χώρος και από την (2) $\Rightarrow$ (1) έπεται το συμπέρασμα.

(3) $\Rightarrow$ (1). Εφόσον ο $X^*$ είναι αυτοπαθής από την (1) $\Rightarrow$ (4) θα έχουμε ότι $\left(X^{**}, w\right) = \left(X^{**}, w^*\right)$. Η $\left(\hat{B}_X \ , w\right)$ είναι norm κλειστό και κυρτό υποσύνολο του ( $X$ και άρα και του ) $X^{**}$, έπεται από το θεώρημα του Mazur ότι είναι ασθενώς κλειστό υποσύνολο του $X^{**}$. Αλλά τότε από την υπόθεσή μας είναι ασθενώς$^*$ κλειστό υποσύνολο του $X^{**}$. Από το θεώρημα Goldstine έπεται ότι $\hat{B}_X = \hat{B}_{X^{**}}$. Κατά συνέπεια $X = X^{**}$.

<u>Πόρισμα</u> 4.2.2 Έστω $X$ αυτοπαθής χώρος Banach και $Y$ κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του $X$. Τότε ο $Y$ είναι επίσης αυτοπαθής.

<u>Απόδειξη</u>: Παρατηρούμε ότι $\hat{B}_Y = Y \cap \hat{B}_X$. Επειδή από το θεώρημα του Mazur ο $Y$ είναι ασθενώς κλειστό υποσύνολο του $X$ και από το θεώρημα 4.2.1 η $\hat{B}_X$ είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του $X$, έπεται ότι η $\hat{B}_Y$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο. Έτσι πάλι από το θεώρημα 4.2.1 ο $Y$ είναι αυτοπαθής χώρος.

<u>Πόρισμα </u>4.2.3 Έστω $X$ αυτοπαθής χώρος Banach. Αν $x^* \in X^*$, τότε υπάρχει $x_0 \in X$ με $\|x_0\| = 1$ ώστε $\|x^*\| = x^*(x_0)$.

<u>Απόδειξη</u> Υποθέτομε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x^* \neq 0$. Το $x^*$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς την ασθενή τοπολογία του $X$ και η $\hat{B}_X$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο, αφού ο $X$ είναι αυτοπαθής. Έπεται ότι υπάρχει $y_0 \in \hat{B}_X$ ώστε

$$\left|x^*(y_0)\right| = \sup\left\{\left|x^*(x)\right| : \|x\| \leq 1\right\} = \|x^*\|$$

Παρατηρούμε ότι, $\|x^*\| = \|x^*(y_0)\| \leq \|x^*\| \cdot \|y_0\| \Rightarrow \|y_0\| = 1$ Επίσης έχομε ότι υπάρχει $a \in K$ με $|a| = 1$ ώστε $\left|x^*(y_0)\right| = ax^*(y_0) = x^*(ay_0)$. Έτσι θέτομε $x = ay_0$ και έχομε $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$.

<u>Παρατηρήσεις</u> 1) Το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν ισχύει πάντοτε χωρίς την υπόθεση της αυτοπάθειας. Για παράδειγμα αν $\Lambda : c_0 \to R : \Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}, x = \left(x(n)\right) \in c_0$ (=ο χώρος των μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών ) τότε ισχύουν:

(α) Το $\Lambda$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\|\Lambda\| = 1$

(β) Για κάθε $x \in c_0$ με $\|x\|_\infty \leq 1 \Rightarrow |\Lambda(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{2^n} < 1$

( Πρβλ. την άσκηση (2) της παραγράφου 2).

2) Αν $X$ είναι χώρος με νόρμα τότε από το θεώρημα Hahn-Banach ( αλλά και από το θεώρημα Alaoglou ) έχομε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε $x^*(x) = \|x\|$. Έτσι το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει θεωρώντας τον $X$ ως συζυγή του $X^*$ ( $X^{**} = X$ )

<u>Θεώρημα</u> 4.2.4 Έστω $X$ αυτοπαθής χώρος Banach και $\mathrm{K} \subseteq X$ . Τότε το $\mathrm{K}$ είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνο αν το $\mathrm{K}$ είναι ασθενώς κλειστό και norm φραγμένο.

<u>Απόδειξη</u> « $\Rightarrow$ » Έστω ότι το $\mathrm{K}$ είναι ασθενώς συμπαγές. Τότε βέβαια το $\mathrm{K}$ είναι ασθενώς κλειστό. Αν $x^* \in X^*$ τότε επειδή το $x^*$ είναι ασθενώς συνεχές και το $\mathrm{K}$ ασθενώς συμπαγές, έχομε ότι $\sup\left\{|x^*(x)| : x \in \mathrm{K}\right\} < +\infty$ . Από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος έπεται ότι το $\mathrm{K}$ είναι norm φραγμένο.

« $\Leftarrow$ » Έστω $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathrm{K} \subseteq \hat{\mathrm{B}}(0,\varepsilon)$. Από την αυτοπάθεια του $X$ η $\hat{\mathrm{B}}_X(0,\varepsilon)$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο. Επειδή το $\mathrm{K}$ είναι ασθενώς κλειστό συμπεραίνουμε ότι είναι ασθενώς συμπαγές.

…………………………………………

<u>Παρατηρήσεις</u> 4.2.5 1) Ένας τοπολογικός χώρος $X$ λέγεται ακολουθιακά συμπαγής, αν κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ έχει κάποια υπακολουθία $(x_{k_n})$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in X$ .

Ένα ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές υποσύνολο $\mathrm{K}$ ενός χώρου Banach είναι αναγκαία <u>norm φραγμένο</u>. Πράγματι, αν το $\mathrm{K}$ δεν ήταν φραγμένο τότε θα υπήρχε μια ακολουθία $(x_n) \subseteq \mathrm{K}$ ώστε $\|x_n\| \geq n$ για κάθε $n \geq 1$. Έστω $(x_{k_n})$ μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της $(x_n)$, τότε βέβαια η $(x_{k_n})$ θα ήταν φραγμένη άτοπο.

2) Το θεώρημα 4.2.4 είναι συνέπεια ενός γενικότερου αποτελέσματος: Αν $X$ χώρος Banach και $\mathrm{K} \subseteq X^*$ τότε το $\mathrm{K}$ είναι ασθενώς$^*$ συμπαγές αν και μόνο αν είναι ασθενώς$^*$ κλειστό και norm φραγμένο ( πρβλ. τις ασκήσεις ). Έπεται ιδιαίτερα από το αποτέλεσμα αυτό ότι κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι norm φραγμένο ( γιατί; ).

<u>Λήμμα</u> 4.2.6 Κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο $\mathrm{K}$ ενός διαχωρίσιμου χώρου Banach $X$ είναι μετρικοποιήσιμο.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $K$ ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του $X$. Από το θεώρημα 4.1.8 η $\left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος χώρος επομένως διαχωρίσιμος. Έστω $D = \left\{x_n^* : n \geq 1\right\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο της $\left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$. Παρατηρούμε ότι το $D$ διαχωρίζει τα σημεία του $X$. Πράγματι, έστω $x \in X$ ώστε $x_n^*(x) = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Επειδή το $x = \varphi(x)$ είναι ένα ασθενώς$^*$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές επί του $X^*$ ($\left(X^*, w^*\right)^* = X^*$), είναι και συνεχής συνάρτηση αν περιορισθεί στην $\left(B_{X^*}, w^*\right)$ έπεται ότι $x^*(x) = 0$ για κάθε $x^* \in B_{X^*}$ και άρα $x^*(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ .Έτσι έχομε ότι $x = 0$.

Ορίζουμε τον τελεστή $T : X \to c_0$ ώστε $T(x) = \left(\dfrac{x_n^*(x)}{n}\right)_{n \geq 1}$ Εύκολα ελέγχεται ότι ο $T$ είναι καλά ορισμένος, γραμμικός $1-1$ ( το $D$ διαχωρίζει τα σημεία του $X$ ) και φραγμένος με$\|T\| \leq 1$. [ Επειδή από το θεώρημα 4.1.13 ο $T$ είναι ασθενώς συνεχής, έπεται ότι το ασθενώς συμπαγές υποσύνολο$K$ του $X$ είναι ομοιομορφικό με το ασθενώς συμπαγές υποσύνολο $T(K)$ του $c_0$. Όμως το $T(K)$ είναι norm φραγμένο από την παρατήρηση 4.2.5 (2) και όπως γνωρίζουμε από το πόρισμα 4.1.9 η ασθενής τοπολογία στα φραγμένα υποσύνολα ενός χώρου με διαχωρίσιμο συζυγή ($c_0^* = \ell_1$ ) είναι μετρικοποιήσιμη. Έτσι το $(T(K), w)$ είναι μετρικοποιήσιμο και συνεπώς και το $(K, w)$ είναι μετρικοποιήσιμο.

Από το προηγούμενο Λήμμα έπεται εύκολα το ακόλουθο.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.7 Κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο $K$ ενός χώρου Banach $X$ είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $(x_n)$ τυχούσα ακολουθία σημείων του $K$. Θέτομε $\Omega = cl_w\left\{x_n, n \geq 1\right\} \subseteq K$ και$Y = cl_{\|\cdot\|}\left\langle x_n, n \geq 1\right\rangle$ (=η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\left\{x_n, n \geq 1\right\}$ ). Προφανώς ο $Y$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach και το $\Omega$ είναι ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του $Y$. Από το Λήμμα 4.2.6 ο χώρος $(\Omega, w)$ είναι μετρικοποιήσιμος και συνεπώς η $(x_n)$ έχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο $\Omega \subseteq K$.

……………………………………….

Το αντίστροφο του προηγουμένου αποτελέσματος ισχύει και είναι ένα βαθύ αποτέλεσμα που ανήκει στον Eberlein . Διατυπώνουμε το θεώρημα του Eberlein και για την απόδειξή του παραπέμπουμε στα βιβλία [F-H-H-M-P-Z] , [M] και [D].

<u>Θεώρημα</u> 4.2.8 ( Eberlein) Ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι ασθενώς συμπαγές ( αν και μόνο ) αν είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές.

Η ακόλουθη εφαρμογή του θεωρήματος 4.2.7 μας λέει ότι, λόγω της ιδιότητας Schur, ο χώρος $\ell_1$ βρίσκεται στον αντίποδα των αυτοπαθών χώρων.

<u>Πρόταση</u> 4.2.9 Ένα υποσύνολο $\mathrm{K}$ του χώρου $\ell_1$ είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνο αν είναι norm συμπαγές.

<u>Απόδειξη</u> Αν το $\mathrm{K}$ είναι norm συμπαγές τότε το $\mathrm{K}$ προφανώς είναι ασθενώς συμπαγές. Έστω ότι το $\mathrm{K}$ είναι ασθενώς συμπαγές. Από το θεώρημα 4.2.7 κάθε ακολουθία $(x_n)\subseteq \mathrm{K}$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα και συνεπώς - από την ιδιότητα Schur του $\ell_1$- norm συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο $\mathrm{K}$. Έτσι το $\mathrm{K}$ είναι norm συμπαγές υποσύνολο του $\ell_1$.

Από το θεώρημα του Eberlein έπεται και ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των αυτοπαθών χώρων.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.10 Έστω $X$ χώρος Banach. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Ο $X$ είναι αυτοπαθής

(β) Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $X$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

<u>Απόδειξη</u> (α) $\Rightarrow$(β) Η $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο, έτσι από το θεώρημα 4.2.7 έπεται το συμπέρασμα.

(β) $\Rightarrow$(α) Από το θεώρημα 4.2.8 ( Eberlein) έπεται ότι η $(\mathrm{B}_X, w)$ είναι συμπαγές σύνολο και έτσι ο $X$ είναι αυτοπαθής.

<u>Παραδείγματα</u>. (1) Οι χώροι $\ell_p$ και $L_p = L_p[0,1]$, για $1 < p < +\infty$ είναι αυτοπαθείς.

Πράγματι, αν $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε ισχύει $\ell_p^{**}=\ell_q^{*}=\ell_p$, υπό την έννοια ότι για κάθε $f\in \ell_q^{*}$ υπάρχει $g\in \ell_p$ ώστε $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k g(k)$ για κάθε $x=(x_k)\in \ell_q$. Η δράση του $f$ επί του $x$ είναι ίδια με την δράση του $g$ επί του $x$. Έπεται ότι η κανονική απεικόνιση $\varphi:\ell_p\to \ell_p^{**}$ είναι <u>επί</u> του $\ell_p^{**}$. Για τον $L_p$ ο έλεγχος ότι η $\varphi$ είναι επί του $L_p^{**}$ είναι ανάλογος.

(2) Ο χώρος $c_0$ δεν είναι αυτοπαθής επειδή $c_0^{**}=\ell_\infty$ και ο $\ell_\infty$ ως γνωστόν δεν είναι διαχωρίσιμος. Ο χώρος $\ell_1$ επίσης δεν είναι αυτοπαθής. Αν ήταν, τότε ο $\ell_1^{**}$ θα ήταν διαχωρίσιμος και συνεπώς ο $\ell_1^{*}=\ell_\infty$ θα ήταν επίσης διαχωρίσιμος, άτοπο.

3) Αποδεικνύεται ότι κανένας χώρος από την οικογένεια $c_0$ και $\ell_p, 1 \le p < +\infty$, δεν είναι ισομορφικός με υπόχωρο κάποιου άλλου μέλους της οικογένειας. Έτσι για παράδειγμα αν $1 \le p \ne q < +\infty$ τότε ο $\ell_p$ δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\ell_q$. ( Πρβλ. [L-T] σελ. 53-4 ).

<u>Ορισμός</u> 4.2.11 Έστω $(M, d)$ μετρικός χώρος και $A$ μη κενό υποσύνολο του $M$. Το $A$ λέγεται <u>προσεγγίσιμο</u> ( proximal )αν , για $x \in M$ υπάρχει $y \in A$ ώστε

$$d(x, y) = d(x, A) \ (= \inf \{d(x, z) : z \in A\}).$$

<u>Σχόλιο</u>. Όπως γνωρίζουμε αν $H$ είναι χώρος Hilbert και $A \subseteq H$ κλειστό κυρτό τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει $y \in A$ έτσι ώστε $d(x, y) = d(x, A)$ ( και το $A$ είναι συνεπώς προσεγγίσιμο ). Η ιδιότητα αυτή των χώρων Hilbert , όχι στην πλήρη της μορφή, κληροδοτείται στους αυτοπαθείς χώρους.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.12 Έστω $X$ αυτοπαθής χώρος Banach και $A \subseteq X$ κλειστό και κυρτό. Τότε το $A$ είναι προσεγγίσιμο.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x_0 \in X$ με $x_0 \notin A$. Θέτομε $d = d(x_0, A)$ και επιλέγομε μια ακολουθία $(x_n) \subseteq A$ ώστε $\|x_n - x_0\| \to d$. Η $(x_n)$ είναι βέβαια φραγμένη ακολουθία και επειδή ο $X$ είναι αυτοπαθής, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{w} x \in X$. Επειδή το $A$ είναι κλειστό κυρτό από το θεώρημα Mazur to $x \in A$. Έστω $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε $\|x - x_0\| = |x^*(x - x_0)|$. Τότε έχομε $\|x - x_0\| = |x^*(x - x_0)| \le |x^*(x - x_{k_n})| + |x^*(x_{k_n} - x_0)|$
$\le |x^*(x - x_{k_n})| + \|x_{k_n} - x_0\|$

Παίρνοντας όρια, συμπεραίνουμε ότι $\|x - x_0\| \le d$ και έτσι έχομε $\|x - x_0\| = d = d(x_0, A)$.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.13 Έστω $X$ χώρος με νόρμα και $x^* \in X^*$ με $x^* \ne 0$. Τότε ο πυρήνας $Kerx^*$ του $x^*$ είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $|x^*(x)| = \|x^*\|$.

<u>Απόδειξη</u> «$\Rightarrow$» Η απεικόνιση $\Lambda : X / Kerx^* \to K : \Lambda(x + Kerx^*) = x^*(x)$ είναι γραμμική φραγμένη $1-1$ και επί του $K$ με $\|\Lambda\| = \|x^*\|$ ( Πρβλ. την απόδειξη της πρότασης1.12). Επομένως είναι ένας ισομορφισμός μονοδιάστατων χώρων Banach, έτσι υπάρχει $x_0 \in X$ με $\|x_0 + Kerx^*\| = 1$ και $|\Lambda(x_0 + Kerx^*)| = \|\Lambda\|$. Εφόσον ο $Kerx^*$ είναι προσεγγίσιμος, υπάρχει $y \in Kerx^*$ ώστε $\|x_0 - y\| = d(x_0, Kerx^*) = \|x_0 + Kerx^*\| = 1$.

Έπεται ότι, $|x^*(x_0 - y)| = |x^*(x_0)| = |\Lambda(x_0 + Kerx^*)| = \|\Lambda\| = \|x^*\|$.

Το ζητούμενο $x$ είναι το $x = x_0 - y$.

«$\Leftarrow$» Έστω $x_0 \in X$ με $x_0 \notin Kerx^*$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ ώστε $\left|x^*(x)\right| = \left\|x^*\right\|$. Επειδή $\dim\left(X / Kerx^*\right) = 1$, υπάρχουν $y \in Kerx^*$ και $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$ ώστε $x = y + \lambda x_0$. Αν $z$ είναι τυχόν στοιχείο του $Kerx^*$ θα έχουμε

$$\|z - x_0\| \geq \frac{\left\|x^*(z - x_0)\right\|}{\left\|x^*\right\|} = \frac{\left|x^*(x_0)\right|}{\left\|x^*\right\|} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{\left|x^*(y + \lambda x_0)\right|}{\left\|x^*\right\|} = \frac{1}{|\lambda|} = \left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|.$$

Έπεται ότι, $d\left(x_0, Kerx^*\right) = \left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|$. Άρα ο $Kerx^*$ είναι προσεγγίσιμος.

<u>Παρατήρηση</u> 4.2.14 1) Ο πυρήνας του συναρτησοειδούς $\Lambda : c_0 \to R$, $\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$, $x = \left(x(n)\right) \in c_0$, δεν είναι προσεγγίσιμος εφόσον η νόρμα του $\Lambda$ δεν επιτυγχάνεται σε κανένα σημείο της μοναδιαίας σφαίρας του $c_0$. ( Πρβλ. την παρατήρηση (1) μετά το πόρισμα 4.2.3 .)

2) Αν ο χώρος $X$ είναι αυτοπαθής τότε όπως έπεται από το θεώρημα 4.2.13 και το πόρισμα4.2.2- ο πυρήνας κάθε συναρτησοειδούς $x^* \in X^*$ με $x^* \neq 0$ είναι προσεγγίσιμος.

3) Αποδεικνύεται ότι και το αντίστροφο του θεωρήματος 4.2.12 ισχύει: Αν κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι προσεγγιστικό τότε ο χώρος είναι αυτοπαθής

( Πρβλ. το [M] σελ 435-6)

4) Έστω $X$ χώρος με νόρμα, $Y$ κλειστός υπόχωρος του $X$ και $\pi : X \to X / Y$ η κανονική απεικόνιση. Αποδεικνύεται τότε ότι ο $Y$ είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν

$$\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right) = \hat{\mathrm{B}}_{X/Y}.$$

(Πρβλ. και τις παρατηρήσεις 1.4 και 1.6 της παραγράφου 1, την παρατήρηση (1) μετά το πόρισμα 4.2.3 καθώς και τις ασκήσεις που ακολουθούν.)