4 Ασθενείς τοπολογίες σε χώρους με νόρμα

4.1 θεωρήματα Mazur, Alaoglou, Goldstine ….

Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Υπενθυμίζουμε ότι η ασθενής τοπολογία T_w του X έχει ως βάση (ανοικτών) περιοχών του $0\in X$ όλα τα σύνολα της μορφής $V_{x_1^*,\dots,x_n^*,\varepsilon}=\left\{x\in X:\left|x_k^*(x)\right|<\varepsilon, k=1,2,\dots,n\right\}$, ($=B_{\{x_1^*,\dots,x_n^*\}}(0,\varepsilon)$) όπου $x_1^*,\dots,x_n^*\in X^*, n\in N, \varepsilon>0$.

Ένα δίκτυο σημείων του X , $(x_i)_{i\in I}$ συγκλίνει ασθενώς στο $x\in X$, δηλαδή $x_i \xrightarrow{w} x$ αν και μόνο αν $x^*(x_i)\to x^*(x)$ για κάθε $x^*\in X^*$.

Η ασθενής* τοπολογία T_{w^*} του X^* έχει ως βάση περιοχών του $0\in X^*$ όλα τα σύνολα της μορφής $V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon}=\left\{x^*\in X^*:\left|x^*(x_k)\right|<\varepsilon, k=1,2,\dots,n\right\}$, ($=B_{\{x_1,\dots,x_n\}}(0,\varepsilon)$) όπου $x_1,\dots,x_n\in X$, $n\in N$, $\varepsilon>0$.

Ένα δίκτυο σημείων του X^*, $(x_i^*)_{i\in I}$ συγκλίνει ασθενώς * στο $x^*\in X^*$, δηλαδή $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ αν και μόνο αν $x_i^*(x)\to x^*(x)$ για κάθε $x\in X$. Επίσης παρατηρούμε ότι:

1) Από τον ορισμό τους τόσο η ασθενής τοπολογία του X όσο και ασθενής* τοπολογία του X^* είναι μικρότερες των αντιστοίχων norm τοπολογιών .

Δηλαδή $T_w\subseteq T_{\|\cdot\|}$ και $T_{w^*}\subseteq T_{\|\cdot\|}$.

2) Ο X ταυτίζεται ισομετρικά με έναν υπόχωρο του X^{**} μέσω της φυσιολογικής απεικόνισης

$$\varphi: X\to X^{**}:\varphi(x)\left(x^*\right)=x^*(x),\ x\in X .$$

3) Έστω $(x_n)\subseteq X$ και $x\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη.

Πράγματι $\sup\limits_{n\in N}\left|x^*(x_n)\right|<+\infty$ για κάθε $x^*\in X^*$, επομένως από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος έχουμε το συμπέρασμα.

4) Έστω $(x_n^*)\subseteq X^*$ και $x^*\in X^*$. Αν ο X είναι χώρος Banach και $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε η ακολουθία (x_n^*) είναι φραγμένη. Το συμπέρασμα έπεται όπως προηγουμένως από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος.

5) Αν X είναι απειροδιάστατος χώρος με νόρμα τότε οι περιοχές του $0 \in X$ στην ασθενή τοπολογία, δεν είναι φραγμένα σύνολα αφού $\bigcap_{k=1}^{n} Kerx_k^* \subseteq V_{x_1^*,\ldots,x_n^*,\varepsilon}$. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για την ασθενή * τοπολογία.

<u>4.1.1Παραδείγματα</u>. 1) Έστω $X = c_0$ ή ℓ_p $(1 < p < +\infty)$ και έστω (e_n) η ακολουθία που ορίζεται ως $e_n(k) = 1$ αν $n = k$ και 0 αν $n \neq k$. Τότε $e_n \xrightarrow{w} 0$ αλλά η (e_n) δεν είναι norm-συγκλίνουσα. Αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για $X = \ell_p$, η απόδειξη για το c_0 είναι ανάλογη. Έστω $x^* \in X^* = \ell_q$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, τότε $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ και βέβαια $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < +\infty$. Επομένως $x^*(e_n) = x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Για το δεύτερο συμπέρασμα, παρατηρούμε ότι αν μια ακολουθία είναι norm-συγκλίνουσα τότε είναι και ασθενώς συγκλίνουσα στο ίδιο όριο (γιατί;). Επομένως η (e_n) δεν είναι norm συγκλίνουσα, αφού $\|e_n\|_p = 1$, $n \in N$. Σημειώνουμε ότι η ακολουθία (e_n) ονομάζεται η « συνήθης βάση» των χώρων ℓ_p ή c_0.

2) <u>Η ιδιότητα Schur στον</u> ℓ_1. Στον χώρο Banach ℓ^1, μια ακολουθία συγκλίνει ασθενώς αν και μόνο αν είναι norm – συγκλίνουσα. Η μια κατεύθυνση είναι προφανής, κάθε norm – συγκλίνουσα ακολουθία είναι και ασθενώς συγκλίνουσα στο ίδιο όριο (η τοπολογία της νόρμας είναι λεπτότερη της ασθενούς). Έστω (x_n) ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία.

Υποθέτομε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$. Ας υποθέσομε ότι $\|x_n\|_1$ δεν συγκλίνει στο 0. Θεωρώντας εν ανάγκη μια υπακολουθία της (x_n) και κανονικοποιώντας μπορούμε να υποθέσομε ότι $\|x_n\|_1 = 1$ για κάθε $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι

$$x_n(j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ j \in N \qquad (1)$$

(Η ακολουθία $(e_n) \subseteq \ell_\infty = \ell_1^*$, άρα $e_j(x_n) = x_n(j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.)

Επιλέγομε με επαγωγή ακολουθίες μη αρνητικών ακεραίων $1 = n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ και $0 < N_0 < N_1 < \ldots < N_k < \ldots$ έτσι ώστε:

$$\sum_{j=1}^{N_{k-1}} |x_{n_k}(j)| < \frac{1}{100} \text{ και } \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} |x_{n_k}(j)| \geq \frac{9}{10} \qquad (2)$$

Η επαγωγή έχει ως εξής: Θέτομε $N_0 = 0$, $n_1 = 1$ και επιλέγομε $N_1 > 1$ ώστε η δεύτερη από τις ανισότητες (2) να ισχύει (η πρώτη ισχύει τετριμμένα αφού το άθροισμα σε αυτήν είναι το κενό).

Κατόπιν επιλέγομε $n_2 > n_1$ ώστε η πρώτη από τις (2) να ισχύει και μετά $N_2 > N_1$ ώστε η δεύτερη από τις (2) να ικανοποιείται.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο σημειώνοντας ότι στην επιλογή των n_k χρησιμοποιούμε την (1) ενώ στην επιλογή των N_k ότι $\left\| x_{n_k} \right\|_1 = 1$. (Πρβλ. και την παρατήρηση μετά το παράδειγμα (2)) .

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $a \in \ell_\infty = \ell_1^*$ με

$$a(j) = \operatorname{sgn}\left(x_{n_k}(j) \right),\ j \in \left[N_{k-1}+1, N_k \right],\ k = 1,2,\ldots$$

Τότε έχουμε,

$$a\left(x_{n_k} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_{n_k}(j) a(j) = \sum_{j=1}^{N_{k-1}} \pm x_{n_k}(j) + \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} \left| x_{n_k}(j) \right| + \sum_{j=N_k+1}^{\infty} \pm x_{n_k}(j)$$

$\geq \frac{9}{10} - \frac{1}{100} - \frac{1}{10}$, άτοπο διότι $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{w} 0$ και συνεπώς, $a\left(x_{n_k} \right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

<u>Παρατηρήσεις</u>. 1) Τα δύο πρώτα βήματα της επαγωγής στο απόδειξη της ιδιότητας Schur του ℓ_1 είναι τα ακόλουθα:

Θέτομε $N_0 = 0$ και $n_1 = 1$. Επειδή $\left\| x_1 \right\|_1 = 1$, υπάρχει $N_1 > N_0 = 0$ ώστε

$$\sum_{j=0}^{N_1} \left| x_1(j) \right| \geq \frac{9}{10}$$

Έστω $n_2 > n_1$ ώστε $\sum_{j=1}^{N_1} \left| x_{n_2}(j) \right| < \frac{1}{100}$ $\quad \left(\max\left\{ \left| x_n(j) \right| : 1 \leq j \leq N_1 \right\} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Επιλέγομε τώρα $N_2 > N_1$ ώστε, $\sum_{j=N_1+1}^{N_2} \left| x_{n_2}(j) \right| \geq \frac{9}{10}$ $\qquad$ ($\left\| x_{n_2} \right\|_1 = 1$)

2) Καθώς- όπως θα αποδείξουμε αργότερα- τα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα ενός διαχωρίσιμου χώρου με νόρμα είναι μετρικοποιήσιμα, το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει ότι τα ασθενώς συμπαγή και τα norm συμπαγή υποσύνολα του ℓ_1 συμπίπτουν .

3) Αποδεικτικές τεχνικές ως η παραπάνω ονομάζονται «slinding hump arguments».

<u>Θεώρημα</u> 4.1.2 Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ισχύουν

(1) $\quad X^* = (X, w)^*$ $\quad$ και $\quad$ (2) $\quad \left(X^*, w^* \right)^* = X$

<u>Απόδειξη</u> (1) Αν $\Lambda:(X,w)\to K$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές τότε, επειδή η norm τοπολογία είναι λεπτότερη της ασθενούς τοπολογίας, το $\Lambda\in X^*$. Έστω τώρα $\Lambda\in X^*$, αν $\varepsilon>0$ τότε το Λ είναι βέβαια φραγμένο στην ασθενώς ανοικτή περιοχή $V_{\Lambda,\varepsilon}$ του $0\in X$, επομένως από την πρόταση 3.1.10 το Λ είναι συνεχής συνάρτηση όταν ο X έχει την ασθενή τοπολογία, δηλαδή $\Lambda\in(X,w)^*$.

(2) Έστω $x\in X$ τότε το x μπορεί να θεωρηθεί ως (φραγμένο) γραμμικό συναρτησοειδές επί του X^* μέσω της φυσιολογικής ταύτισης του X με έναν υπόχωρο του X^{**}

($\varphi(x)(x^*)=x^*(x), x^*\in X^*$). Αν $\varepsilon>0$ τότε η $V_{x,\varepsilon}$ είναι ασθενώς * ανοικτή περιοχή του $0\in X^*$ και βέβαια το $x=\varphi(x)$ είναι φραγμένο στην $V_{x,\varepsilon}$, επομένως από την πρόταση 3.1.10 το $x=\varphi(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση όταν ο X^* έχει την ασθενή * τοπολογία, συνεπώς $X\subseteq(X^*,w^*)$. Έστω τώρα $\Lambda\in(X^*,w^*)^*$, από την πρόταση 3.1.10 το Λ είναι φραγμένο σε μια ασθενώς * ανοικτή περιοχή του $0\in X^*$, δηλαδή υπάρχουν $x_1,\dots,x_n\in X$ και $\varepsilon>0$ ώστε $x^*\in V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon}\Rightarrow\left|\Lambda(x^*)\right|<1$.

Αν $x^*\in\bigcap_{k=1}^{n}Kerx_k$ και $m\in N$ τότε $mx^*\in\bigcap_{k=1}^{m}Kerx_k\subseteq V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon}$.

Έπεται ότι $\left|\Lambda(x^*)\right|<\dfrac{1}{m}$ για κάθε $m\in N$ και άρα $x^*\in Ker\Lambda$. Τελικά έχουμε,

$\bigcap_{k=1}^{n}Kerx_k\subseteq Ker\Lambda$. Έτσι από την πρόταση 3.3.18 το Λ είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1,\dots,x_n$ και άρα $\Lambda\in X$.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Σχόλιο</u> Παρατηρούμε ότι η ασθενής τοπολογία επί του X είναι η μικρότερη τοπολογία η οποία κάνει όλα τα συναρτησοειδή $x^*\in X^*$ συνεχείς συναρτήσεις. Αντίστοιχα η ασθενής * τοπολογία επί του X^* είναι η μικρότερη τοπολογία η οποία κάνει όλα τα συναρτησοειδή της μορφής $\{\varphi(x):x\in X\}$ (πρβλ. την απόδειξη του θεωρήματος 4.1.2 (2)) συνεχείς συναρτήσεις επί του X^*.

…………………………………………….

Αποδεικνύουμε στην συνέχεια το σημαντικό θεώρημα του Mazur και εξετάζουμε κάποιες συνέπειές του.

<u>Θεώρημα</u> 4.1.3 (Mazur)Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $\mathrm{K}\subseteq X$ <u>κυρτό</u> σύνολο. Τότε, μ

$$c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}=c\ell_w\mathrm{K}.$$

(Η ασθενής και η norm κλειστότητα ενός κυρτού συνόλου σε ένα χώρο με νόρμα ταυτίζονται.)

<u>Απόδειξη</u> Επειδή $T_w \subseteq T_{\|\cdot\|}$, έπεται ότι $c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K} \subseteq c\ell_w\mathrm{K}$. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in c\ell_w\mathrm{K} \setminus c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}$. Εφαρμόζοντας το διαχωριστικό θεώρημα Hahn – Banach (θεώρημα 3.5.8) στα ξένα κλειστά κυρτά σύνολα $\{x_0\}$ και $c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}$ του $(X,\|\cdot\|)$ (το $\{x_0\}$ είναι συμπαγές), βρίσκουμε $\Lambda \in X^*$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ ώστε

$$\operatorname{Re}\Lambda(x_0) < \lambda_1 < \lambda_2 < \operatorname{Re}\Lambda(x), \text{ για κάθε } x \in c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}.$$

Επειδή, από το θεώρημα 4.1.2, ισχύει ότι $X^* = (X, w)^*$ το σύνολο $U = \{x \in X : \operatorname{Re}\Lambda(x) < \lambda_1\}$ είναι ασθενώς ανοικτή περιοχή του x_0 τέτοια ώστε $U \bigcap \mathrm{K} = \varnothing$, άτοπο αφού $x_0 \in c\ell_w\mathrm{K}$.

…………………………………………………

<u>Πόρισμα</u> 4.1.4 Έστω X χώρος με νόρμα και $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό. Τότε έχουμε:

(α) Το K είναι ασθενώς κλειστό αν και μόνο αν είναι norm κλειστό.

(β) Το K είναι ασθενώς πυκνό στον X αν και μόνο αν είναι norm πυκνό στον X

(Ιδιαίτερα, το K μπορεί να είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του X .)

<u>Απόδειξη</u>: Προφανής συνέπεια του θεωρήματος του Mazur.

Μια άλλη αξιοσημείωτη συνέπεια του θεωρήματος του Mazur είναι η ακόλουθη.

<u>Θεώρημα</u> 4.1.5 Έστω X χώρος με νόρμα, (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(y_n) \subseteq X$ ώστε:

(α) Κάθε y_n είναι κυρτός συνδυασμός μελών της (x_n) και

(β) $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

(Το (α) μας λέει ότι, υπάρχουν αριθμοί $a_{nm} \geq 0$ ώστε $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$, $y_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$ και για κάθε $n \geq 1$, μόνο πεπερασμένα a_{nm} είναι $1 \neq 0$.)

<u>Απόδειξη</u> Έστω $H = co(\{x_n : n \geq 1\})$ (= η κυρτή θήκη του K) και $\mathrm{K} = c\ell_w H$. Τότε $x \in \mathrm{K}$. Από το θεώρημα του Mazur συμπεραίνουμε ότι $x \in c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}$. Έπεται προφανώς ότι υπάρχει ακολουθία $(y_n) \subseteq H$ ώστε $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

…………………………………….

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την σημασία του προηγούμενου αποτελέσματος ας το εξετάσουμε στην περίπτωση ενός χώρου Banach της μορφής $C(\mathrm{K})$ με K συμπαγή χώρο. Θα χρειαστούμε πρώτα το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.1.6 Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff $f_n:\mathrm{K}\to K$, $n\geq 1$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ώστε $\|f_n\|_\infty \leq \mathrm{M}<+\infty$, $n\geq 1$, και $f:\mathrm{K}\to K$ συνεχής συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(ι) $f_n \to f$ κατά σημείο επί του K.

(ιι) $f_n \xrightarrow{w} f$ στον χώρο Banach $C(\mathrm{K})$.

Απόδειξη Είναι αρκετό να αποδείξουμε το αποτέλεσμα για τον χώρο $C(\mathrm{K})$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του K.

(ιι) $\Rightarrow$(ι) Αν $t\in\mathrm{K}$ τότε η απεικόνιση $\delta_t:\mathrm{K}\to R:\delta_t(f)=f(t)$, είναι ένα φραγμένο $(\|\delta_t\|=1)$ γραμμικό συναρτησοειδές επί του K. Τα συναρτησοειδή $\delta_t, t\in\mathrm{K}$, ονομάζονται μέτρα Dirac επί του K. Επειδή $f_n \xrightarrow{w} f$ έπεται ότι

$$\delta_t(f_n)=f_n(t)\to\delta_t(f)=f(t), \text{ για κάθε } t\in\mathrm{K}.$$

(ι) $\Rightarrow$(ιι) θα χρησιμοποιήσουμε δύο σημαντικά αποτελέσματα από τη θεωρία μέτρου, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue και το θεώρημα αναπαράστασης μέτρων του Riesz

Έστω $\Lambda:C(\mathrm{K})\to R$ θετικό γραμμικό συναρτησοειδές επί του $C(\mathrm{K})$ (δηλαδή, $f\in C(\mathrm{K})$ και $f\geq 0$ τότε $\Lambda(f)\geq 0$). Το Λ αναπαριστάνεται από ένα (μοναδικό) κανονικό θετικό μέτρο Borel μ επί του K έτσι ώστε, $\Lambda(f)=\int_{\mathrm{K}} fd\mu$, $f\in C(\mathrm{K})$.

(Θεώρημα Riesz).

Επειδή η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη, $f_n\to f$ κατά σημείο επί του K και το μ είναι (αναγκαία) φραγμένο μέτρο επί του K, έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue ότι

$$\Lambda(f_n)=\int_{\mathrm{K}} f_n d\mu \to \int_{\mathrm{K}} fd\mu=\Lambda(f)$$

Το συμπέρασμα έπεται τώρα από το γεγονός ότι κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda : C(\mathrm{K}) \to R$ είναι ίσο με την διαφορά δύο θετικών γραμμικών συναρτησοειδών $\Lambda_1, \Lambda_2 : C(\mathrm{K}) \to R$, (δηλαδή $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$).

<u>Σχόλιο</u> Έπεται από το θεώρημα 4.1.5 και το Λήμμα 4.1.6 ότι αν $f_n : \mathrm{K} \to K$, $n \geq 1$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων επί του συμπαγούς χώρου K , η οποία συγκλίνει κατά σημείο επί του K στην συνεχή συνάρτηση f τότε υπάρχει ακολουθία (g_n) κυρτών συνδυασμών μελών της ακολουθίας (f_n) η οποία συγκλίνει <u>ομοιόμορφα</u> επί του K στην f .

……………………………………

<u>Θεώρημα</u> 4.1.7 (Alaoglou). Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $\hat{\mathrm{B}}_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ του συζυγούς X^* του X είναι ασθενώς * συμπαγές σύνολο.

<u>Απόδειξη</u> Για κάθε $x \in X$ θέτομε

$$A_x = \{\lambda \in K : |\lambda| \leq \|x\|\},$$

προφανώς κάθε A_x είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του K .

Επίσης θέτομε

$$\Omega = \prod_{x \in X} A_x$$

και θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο Ω με την τοπολογία γινόμενο έστω τ . Από το θεώρημα Tychonoff της τοπολογίας ο χώρος (Ω, τ) είναι συμπαγής.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi : \hat{\mathrm{B}}_{X^*} \to \Omega : \Phi(x^*) = \left(x^*(x)\right)_{x \in X}$$

και παρατηρούμε ότι η Φ είναι * καλά ορισμένη, αφού $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $x^* \in \hat{\mathrm{B}}_{X^*}$.

Περαιτέρω παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(1) Η Φ είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ των χώρων $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}, w^*\right)$ και του $\Phi\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}\right)$ με την σχετική τοπολογία από τον συμπαγή χώρο (Ω, τ). Πράγματι, είναι σαφές ότι η Φ είναι

$1-1$. Έστω $\left(x_i^*\right)$ δίκτυο στον $\hat{B}_{X^*}$ και $x^* \in X^*$ τότε έχουμε ότι,

$x_i^* \xrightarrow{w^*} x^* \Leftrightarrow x_i^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$ $\Leftrightarrow \Phi\left(x_i^*\right) \xrightarrow{\tau} \Phi\left(x^*\right)$.

Έτσι έχουμε το συμπέρασμα.

(2) Το $\Phi\left(\hat{B}_{X^*}\right)$ είναι κλειστό υποσύνολο του (Ω, τ).

Πράγματι, έστω $\Lambda = \left(\Lambda_x\right)_{x \in X} \in c\ell_\Omega \Phi\left(\hat{B}_{X^*}\right)$. Τότε υπάρχει δίκτυο $\left(x_i^*\right)_{i \in I} \subseteq \hat{B}_{X^*}$ ώστε

$\Phi\left(x_i^*\right) \xrightarrow{\tau} \Lambda \Leftrightarrow x_i^*(x) \to \Lambda_x$ για κάθε $x \in X$.

Είναι απλό να ελέγξουμε ότι:

(α) $\Lambda_{x+y} = \Lambda_x + \Lambda_y$ και (β) $\Lambda_{cx} = c\Lambda_x$, $c \in K$, $x, y \in X$.

Επειδή $\left|\Lambda_x\right| \le \|x\|$, $x \in X$, έπεται από τις (α) και (β) ότι η απεικόνιση $x \in X \to \Lambda_x \in K$, ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές επί του X . Άρα, θέτοντας $x^*(x) = \Lambda_x$, $x \in X$, έχουμε ότι $\Phi\left(x^*\right) = \Lambda$ και έτσι το $\Phi\left(\hat{B}_{X^*}\right)$ είναι κλειστό στον χώρο (Ω, τ).

Είναι τώρα προφανές από τους ισχυρισμούς (1) και (2) ότι ο χώρος $\left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής.

……………………………………………………

Ειδικότερα αν ο $\left(X, \|\cdot\|\right)$ είναι διαχωρίσιμος, το θεώρημα Alaoglou δίνει ένα ισχυρότερο συμπέρασμα.

<u>Θεώρημα</u> 4.1.8 Έστω $\left(X, \|\cdot\|\right)$ διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Τότε η $\left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής <u>μετρικοποιήσιμος</u> χώρος.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $D = \left\{x_n : n \ge 1\right\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X . Θέτομε

$$\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} A_{x_n}$$

όπου $A_x = \left\{\lambda \in K : |\lambda| \le \|x\|\right\}$, $x \in X$.

Παρατηρούμε ότι ο χώρος Ω με την τοπολογία γινόμενο είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος ως αριθμήσιμο καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών μετρικοποιήσιμων χώρων.

Από το θεώρημα 3.3.10 (πρβλ. και το παράδειγμα 3.3.17) έπεται ότι μια μετρική η οποία επάγει την τοπολογία του Ω είναι η ακόλουθη

$$d(a,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|a(n)-b(n)|}{1+|a(n)-b(n)|}\text{ , όπου } a=(a(n)),b=(b(n))\in\Omega$$

Ορίζουμε όπως πριν την απεικόνιση $\Phi:\hat{\mathrm{B}}_{X^*}\to\Omega$ με $\Phi(x^*)=(x^*(x_n))_{n\geq 1}$ και παρατηρούμε ότι η Φ είναι καλά ορισμένη, $1-1$ (αφού το D είναι πυκνό στον X) και συνεχής. Από το θεώρημα Alaoglou (θεώρημα 4.5) ο $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*},w^*\right)$ είναι συμπαγής χώρος, συνεπώς και ο $\Phi\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}\right)$ είναι με την τοπολογία γινόμενο συμπαγής χώρος ομοιομορφικός με τον $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*},w^*\right)$. Επειδή ο Ω είναι μετρικοποιήσιμος έχουμε το συμπέρασμα.

…………………………………………….

<u>Σημείωση</u>. Έστω X χώρος Banach. Ένα υποσύνολο $\mathrm{K}\subseteq X^*$ είναι ασθενώς* συμπαγές αν και μόνο αν είναι ασθενώς* κλειστό και φραγμένο (Άσκηση).

<u>Πόρισμα</u> 4.1.9 Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε ότι ο συζυγής X^* του X είναι διαχωρίσιμος τότε η $\left(\hat{\mathrm{B}}_X,w\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος. (Έπεται προφανώς ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι με την ασθενή τοπολογία μετρικοποιήσιμος χώρος.)

<u>Απόδειξη</u> Από την Παρατήρηση που ακολουθεί έχουμε ότι $\hat{\mathrm{B}}_X\subseteq\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$ και ότι η ασθενής * τοπολογία της $\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$ επάγει στην $\hat{\mathrm{B}}_X$ την ασθενή τοπολογία. Επειδή ο χώρος $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}},w^*\right)$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος έπεται το συμπέρασμα.

<u>Σημείωση</u> Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος (Άσκηση) .

<u>Παρατήρηση</u> 4.1.10 Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $\varphi:X\to X^{**}$ η <u>κανονική εμφύτευση</u> του X στον X^{**} (δηλαδή $\varphi(x)(x^*)=x^*(x)$, $x\in X$, $x^{**}\in X^{**}$). Υπενθυμίζουμε ότι (όπως έπεται από το θεώρημα Hahn-Banach) η φ είναι γραμμική ισομετρία.

Τότε η ασθενής* σχετική τοπολογία επί του X θεωρούμενου ως υποχώρου του X^{**}

(μέσω της φ) <u>συμπίπτει</u> με την ασθενή τοπολογία του X . Έτσι μπορούμε να γράφουμε $(X,w)\approx(\varphi(X),w^*)$.

Πράγματι, έστω $(x_i)_{i\in I}$ δίκτυο στον X και $x\in X$.

Παρατηρούμε ότι, $x_i \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x^*(x_i)\to x^*(x)$ για κάθε

$x\in X^* \Leftrightarrow \varphi(x_i)(x^*)\to\varphi(x)(x^*)$ για κάθε $x^*\in X^*$ $\Leftrightarrow \varphi(x_i)\xrightarrow{w^*}\varphi(x)$.

Με άλλα λόγια η φ είναι επί πλέον ένας ομοιομορφισμός του (X,w) επί του $(\varphi(X).w^*)$

Έχοντας υπόψη την προηγούμενη παρατήρηση διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα Goldstine.

<u>Θεώρημα 4.1.11 (Goldstine</u>) Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε η κλειστή σφαίρα $\hat{B}_X$ του X είναι πυκνή στην κλειστή μοναδιαία σφαίρα $\hat{B}_{X^{**}}$ του X^{**} θεωρούμενη με την ασθενή * τοπολογία. Δηλαδή έχουμε

$$c\ell_{w^*}\hat{B}_X=\hat{B}_{X^{**}}$$

<u>Απόδειξη</u> Επειδή η φ είναι ισομετρία έχουμε ότι $\hat{B}_X\subseteq\hat{B}_{X^{**}}$. Συνεπώς, $c\ell_{w^*}\hat{B}_X\subseteq\hat{B}_{X^{**}}$.
Έστω ότι υπάρχει $x_0^{**}\in\hat{B}_{X^{**}}\setminus c\ell_{w^*}\hat{B}_X$. Από το θεώρημα Alaoglou η σφαίρα $\left(\hat{B}_{X^{**}},w^*\right)$ είναι συμπαγής χώρος, άρα και το $c\ell_{w^*}\hat{B}_X$ είναι με την ασθενή * τοπολογία συμπαγές και κυρτό σύνολο. Από το διαχωριστικό θεώρημα Hahn- Banach (θεώρημα 3.5.8) υπάρχουν $x_0^*\in(X^{**},w^*)^*=X^*$ και $\lambda_1,\lambda_2\in R$ ώστε,

$$\operatorname{Re}x^{**}(x_0^*)<\lambda_1<\lambda_2<\operatorname{Re}x_0^{**}(x_0^*) \text{ για κάθε } x^{**}\in c\ell_{w^*}\hat{B}_X .$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι $\operatorname{Re}x_0^*(x)<\lambda_1<\lambda_2<\operatorname{Re}x_0^{**}(x_0^*)$ για κάθε $x\in\hat{B}_X$.

Έστω $x\in X$ με $\|x\|=1$. Από το αριστερό μέλος της ανισότητας έχουμε ότι, $|x_0^*(x)|=ax_0^*(x)$ για κάποιο $|a|=1$. Άρα $|x_0^*(x)|=x_0^*(ax)=\operatorname{Re}x_0^*(ax)<\lambda_1$, από όπου έπεται ότι $\|x_0^*\|\le\lambda_1$.

Από το δεξί μέλος έχουμε ότι, $\lambda_2<\operatorname{Re}x_0^{**}(x_0^*)\le|x_0^{**}(x_0^*)|\le\|x_0^{**}\|\cdot\|x_0^*\|\le\|x_0^*\|$.

Έτσι καταλήγουμε σε αντίφαση και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Παρατήρηση</u> 4.1.12 Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Έπεται αμέσως από το θεώρημα Golsdstine ότι $c\ell_{w^*}X = X^{**}$.

Επίσης αποδεικνύεται με την υπόθεση ο X είναι απειροδιάστατος ότι: $c\ell_{w^*}S_X = \hat{B}_{X^{**}}$, όπου $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Αυτό σημαίνει ότι αν $x^{**} \in X^{**}$ ώστε $\|x^{**}\| \le 1$ τότε υπάρχει δίκτυο $(x_i)_{i\in I} \subseteq S_X : x_i \xrightarrow{w^*} x^{**}$. (Πρβλ. τις ασκήσεις.)

Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, όπου X και Y χώροι με νόρμα. Θα λέμε ότι ο T είναι <u>ασθενώς συνεχής</u>, αν είναι συνεχής συνάρτησης ως προς τις ασθενείς τοπολογίες των X και Y.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο ενδιαφέρον αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα</u> 4.1.13 Έστω X και Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο T είναι φραγμένος

(β) Ο T είναι ασθενώς συνεχής.

<u>Απόδειξη</u> (α) $\Rightarrow$ (β) . Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο T είναι ασθενώς συνεχής στο $0 \in X$. Έστω U μια βασική περιοχή του $0 \in Y$ στην ασθενή τοπολογία, δηλαδή $U = \{y \in Y : |y_k^*(y)| < \varepsilon, k = 1,2,...,n\}$ όπου $y_1^*,....,y_n^* \in Y^*$ και $\varepsilon > 0$.

Θέτομε, $x_k^* = y_k^* oT, k = 1,2,...,n$. Κάθε x_k^* είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές επί του X, αφού $\|x_k^*\| \le \|y_k^*\| \cdot \|T\|$. Ορίζουμε, $V = \{x \in X : |x_k^*(x)| < \varepsilon, k = 1,2,...,n\}$.

Η V είναι ασθενής περιοχή του $0 \in X$ και αν $x \in V$ τότε $|y_k^*(T(x))| = |x_k^*(x)| < \varepsilon, k = 1,2,...,n$, δηλαδή $T(x) \in U$.

Άρα $T(V) \subseteq U$ και ο T είναι ασθενώς συνεχής στο $0 \in X$.

(β) $\Rightarrow$ (α). Θα αποδείξουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα, έτσι από το ομώνυμο θεώρημα ο T θα είναι φραγμένος.

Παρατηρούμε ότι επειδή ο T είναι ασθενώς συνεχής αν $y^* \in Y^* = (Y,w)^*$, τότε $y^* oT \in (X,w)^* = X^*$ (πρβλ. το θεώρημα 4.2). Κατά συνέπεια,

$$y^* \in Y^* \Rightarrow y^* oT \in X^* \quad (1).$$

Έστω $\left(x_n, T\left(x_n\right)\right), n \geq 1$, ακολουθία στο γράφημα $G(T)$ του T, ώστε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ και $T\left(x_n\right) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. Για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε

$$\left(y^* oT\right)\left(x_n\right) = y^*\left(T\left(x_n\right)\right) \to y^*(y)$$

Αφού $T\left(x_n\right) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ και

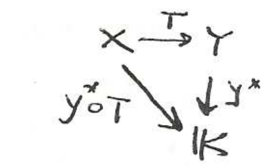
$$\left(y^* oT\right)\left(x_n\right) \to \left(y^* oT\right)(x) = y^*\left(T(x)\right)$$

Αφού $y^* oT \in X^*$ και $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Έπεται ότι, για κάθε $y^* \in Y^*$ ισχύει ότι $y^*\left(T(x)\right) = y^*(y)$. Επειδή ο Y^* διαχωρίζει τα σημεία του Y (πρβλ. θεώρημα 3.5.4) συμπεραίνουμε ότι $y = T(x)$ και έτσι το γράφημα του T είναι κλειστό.

……………………………………………

Από την μέθοδο απόδειξης του προηγουμένου θεωρήματος, συμπεραίνουμε ότι αν $T: X \to Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής μεταξύ των χώρων με νόρμα X και Y τότε η απεικόνιση

$$y^* \in Y^* \to y^* oT \in X^*$$



Είναι καλά ορισμένη και προφανώς γραμμική

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται ο <u>συζυγής</u> τελεστής του T και συμβολίζεται με T^*. Έχομε δηλαδή

$$T^*\left(y^*\right) \underset{o\rho}{=} y^* oT, \, y^* \in Y^*$$

<u>Πρόταση</u> 4.1.14 Έστω X , Y χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ο T^* είναι επίσης φραγμένος και $\left\|T^*\right\| = \|T\|$.

<u>Απόδειξη</u> Παρατηρούμε ότι $\left\|T^*\right\| = \sup\limits_{\|y^*\| \leq 1} \left\|T^*\left(y^*\right)\right\| = \sup\limits_{\|y^*\| \leq 1} \left(\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \left| y^*\left(T(x)\right)\right| \right) =$

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sup_{\|y^*\| \leq 1} \left| y^*\left(T(x)\right)\right| \right) = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\|T(x)\right\| = \|T\|.$$

<u>Παρατήρηση</u> Το θεώρημα 4.1.13 ισχύει και χωρίς την υπόθεση ότι οι X και Y είναι χώροι Banach. Η απόδειξη αυτή αφήνεται ως άσκηση. (Πρβλ. επίσης το [M], Th 2.5.11 , p.214 .)

Αποδεικνύεται επίσης ότι ο συζυγής τελεστής T^* ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή $T : X \to Y$ είναι συνεχής και για τις αντίστοιχες ασθενώς* τοπολογίες. (Άσκηση.)

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο $D \subseteq X$ ενός χώρου με νόρμα λέγεται ολικό στον X αν η κλειστή γραμμική θήκη του D ισούται με το X , δηλαδή $X = \overline{\langle D \rangle}$.

Θεώρημα 4.1.15. Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(ι) Ένα φραγμένο δίκτυο $(x_a)_{a\in A} \subseteq X$ συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$ αν και μόνο αν ισχύει $x^*(x_a) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in D$, όπου D ένα ολικό υποσύνολο του X^*.

(ιι) Αν D είναι ένα ολικό υποσύνολο του X τότε, ένα φραγμένο δίκτυο $(x_a^*)_{a\in A} \subseteq X^*$ συγκλίνει ασθενώς* στο $x^* \in X^*$ αν και μόνο αν ισχύει $x_a^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in D$.

Απόδειξη. Έστω $M > 0$ ώστε, $\|x\| \le M$ και $\|x_a\| \le M$ για κάθε $a \in A$. Θεωρούμε τυχόν στοιχείο $x^* \in X^*$ και έστω (x_k^*) μια ακολουθία γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του D η οποία συγκλίνει ως προς την νόρμα στο x^* (το $\langle D \rangle$ είναι πυκνό υποσύνολο του X^*).

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός τότε υπάρχει $k_0 \in N$ ώστε $\|x_k^* - x^*\| < \varepsilon$ για κάθε $k \ge k_0$.

Έπεται ότι αν $a \in A$ τότε έχουμε,

$$\left|x^*(x_a) - x^*(x)\right| \le \left|x^*(x_a) - x_{k_0}^*(x_a)\right| + \left|x_{k_0}^*(x_a) - x_{k_0}^*(x)\right| + \left|x_{k_0}^*(x) - x^*(x)\right|$$

$$\le M\varepsilon + M\varepsilon + \left|x_{k_0}^*(x_a) - x_{k_0}^*(x)\right| \qquad (1)$$

Επειδή το $x_{k_0}^*$ είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του D ισχύει ότι, $\lim_{a\in A}\left|x_{k_0}^*(x_a) - x_{k_0}^*(x)\right| = 0$. Έτσι αν επιλέξουμε (το ε αρκετά μικρό και) $a_0 \in A$ ώστε $\left|x_{k_0}^*(x_a) - x_{k_0}^*(x)\right| < \varepsilon$ για κάθε $a \ge a_0$, το δεξί μέλος της (1) γίνεται όσο μικρό επιθυμούμε. Έπεται ότι, $\lim_{a\in A}\left|x^*(x_a) - x^*(x)\right| = 0$, δηλαδή

$$x_a^* \xrightarrow{w} x$$

(ιι) Η απόδειξη αυτή είναι ανάλογη και έτσι παραλείπεται.