Ασκήσεις

1) Έστω X τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμος διαχωρίσιμος χώρος. Υποθέτομε ότι ο X δεν είναι συμπαγής. Αποδείξτε ότι ο χώρος $C(X)$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή T_C είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Frechet του οποίου η τοπολογία δεν επάγεται από μια νόρμα.

[Υπόδειξη Ο X έχει μια αριθμήσιμη βάση (U_n) από σχετικά συμπαγή ανοικτά σύνολα. Έπεται ότι υπάρχει μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων (K_n) του X ώστε $K_n \subseteq \operatorname{int} K_{n+1}$, $n \geq 1$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Έτσι ο $C(X)$ μετρικοποιείται από την ακολουθία ημινορμών $p_n(f) = \sup\left\{ |f(x)| : x \in K_n \right\}$, $n \geq 1$. Έστω $V_n = \left\{ f \in C(X) : p_n(f) < \frac{1}{n} \right\}$, η (V_n) είναι βάση περιοχών του $0 \in C(X)$ και αν υποθέσομε ότι V είναι μια φραγμένη περιοχή του $0 \in C(X)$ τότε $V_n \subseteq V$, $n \geq n_0$ για κάποιο $n_0 \in N$. Διακρίνετε τις περιπτώσεις: (α) Υπάρχει $n \geq n_0$ ώστε $K_{n+1} \setminus \operatorname{int} K_{n+1} \neq \varnothing$ και προχωρήστε όπως στο παράδειγμα 3.4.1 και (β) $K_{n+1} = \operatorname{int} K_{n+1}$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε τα σύνολα K_n, $n \geq n_0 + 1$ είναι ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του X και επειδή X δεν είναι συμπαγής υπάρχει $n_1 \geq n_0 : K_{n_0+1} \neq K_{n_1}$ θέτομε $W = K_{n_1+1} \setminus K_{n_1}$ και έστω $f = x_W$ τότε $\varphi \in V_{n_1} \subseteq V_{n_0} \subseteq V$ και $p_{n_1+1}(\varphi) = 1$]

2) Έστω $0 < p < 1$. Θεωρούμε το χώρο ℓ_p των ακολουθιών πραγματικών $x = (x_k)$ ώστε, $q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$. Αποδείξτε ότι η $d(x,y) = q(x-y)$ είναι μια πλήρης μετρική και ότι ο (ℓ_p, d) είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος ο οποίος δεν είναι τοπικά κυρτός. Αποδείξτε ότι ο $\ell_p^* = \ell_\infty$ και επομένως ο συζυγής του ℓ_p διαχωρίζει τα σημεία του ℓ_p.

[Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ και ότι $q(\lambda x) = |\lambda|^p q(x)$, $x, y \in \ell_p$, $\lambda \in R$, από όπου έπεται ότι ο ℓ_p είναι διανυσματικός χώρος και η d μετρική. Η πληρότητα της d αποδεικνύεται όπως και για τους ℓ_p με $p \geq 1$. Για να δείξουμε ότι $\ell_p^* = \ell_\infty$, παρατηρούμε ότι $\ell_p \subseteq \ell_1$ και ότι η τοπολογία του ℓ_p είναι λεπτότερη από την τοπολογία του ℓ_1, επομένως κάθε στοιχείο του ℓ_∞ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές επί του ℓ_p. Αν $f \in \ell_p^*$ τότε το f καθορίζεται από την φραγμένη ακολουθία $a_k = f(e_k)$, $k \in N$, όπου $e_k = \delta_{nk}$, ώστε $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, $x = (x_k) \in \ell_p$. Συνεπώς $\ell_p^* = \ell_\infty$. Για να αποδείξουμε ότι ο ℓ_p δεν είναι τοπικά κυρτός, θεωρούμε την ακολουθία $\left(x^n\right) \subseteq \ell_p$ ώστε $x_k^n = n^{p-1}$ αν $n = k$ και $x_k^n = 0$ αν $n \neq k$.

Παρατηρούμε ότι $\left(x^n\right) \subseteq \hat{B}_d\left(0,1\right)$ και ότι $d\left(x^n, 0\right) \to 0$.

Δείξτε ότι η ακολουθία, $y^n = \dfrac{x^{n+1} + \ldots + x^{2n}}{n}$, δεν είναι φραγμένη στον ℓ_p, παρατηρώντας ότι $d\left(y^n, 0\right) = q\left(y^n\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\dfrac{k^{p-1}}{n}\right)^p \geq \dfrac{n\left(2n\right)^{p(p-1)}}{n^p} = 2^{p(p-1)} \cdot n^{(1-p)^2} \to +\infty$.

Έπεται ότι η $B_d\left(0,1\right)$ δεν μπορεί να περιέχει κυρτή περιοχή του $0 \in \ell_p$.]

3) Έστω $\left(E, \|\cdot\|\right)$ μιγαδικός χώρος με νόρμα και $f \in E^*$. Αποδείξτε ότι αν $u = \mathrm{Re}\, f$ τότε $\|f\| = \|u\|$, δηλαδή, $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \left|f\left(x\right)\right| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \left|\mathrm{Re}\left(f\left(x\right)\right)\right|$.

4) Έστω $\left(E, \|\cdot\|\right)$ πραγματικός χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο $E \times E$ γίνεται ένας μιγαδικός χώρος με νόρμα E_C με πράξεις και νόρμα που ορίζονται ως εξής: $\left(x, y\right) + \left(u, v\right) = \left(x+u, y+v\right)$, $\left(a+ib\right)\left(x, y\right) = \left(ax - by, bx + ay\right)$, $\left\|\left(x, y\right)\right\|_C = \sup\left\{\left\|\cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y\right\| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$, $x, y, u, v \in E$, $a, b \in R$.

(β) Το σύνολο $E \times \{0\}$ είναι ένας κλειστός $R-$ γραμμικός υπόχωρος του E_C ισομετρικός με τον E μέσω της $x \to \left(x, 0\right)$. Αντιστρόφως, $E_C = \left\{h + ik : h, k \in E \times \{0\}\right\}$.

(γ) Η τοπολογία που επάγεται στον $E_C = E \times E$ από την $\|\cdot\|_C$ ταυτίζεται με την τοπολογία γινόμενο που επάγεται στον $E \times E$ από την $\|\cdot\|$.

5) Έστω B κυρτό ισορροπημένο και κλειστό υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου E και $x_0 \in E$ με $x_0 \notin B$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\Lambda \in E^*$ ώστε $\left|\Lambda\left(x\right)\right| \leq 1$, $x \in B$, αλλά $\Lambda\left(x_0\right) > 1$.

6)Έστω E διανυσματικός χώρος επί του K και $p_1, p_2 : E \to R$ ημινόρμες. Αν $f : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $\left|f\left(x\right)\right| \leq p_1\left(x\right) + p_2\left(x\right)$, $x \in E$, τότε υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : E \to K$ ώστε $f = f_1 + f_2$ και $\left|f_i\left(x\right)\right| \leq p_i\left(x\right)$, $x \in E$, $i = 1, 2$.

[<u>Υπόδειξη</u> Βρείτε γραμμικό συναρτησοειδές $\varphi : E \times E \to K$ ώστε $\left|\varphi\left(x_1, x_2\right)\right| \leq p_1\left(x_1\right) + p_2\left(x_2\right)$ και $\varphi\left(x, x\right) = f\left(x\right)$].

7) Έστω E πραγματικός χώρος με νόρμα και A,B μη κενά ξένα κυρτά υποσύνολα του E ώστε $0\notin\overline{A-B}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f\in E^*$ ώστε

$$\sup\left\{f(x):x\in B\right\}<\inf\left\{f(x):x\in A\right\}.$$

Ισχύει το αποτέλεσμα αυτό σε ένα πραγματικό τοπικά κυρτό χώρο;

8)Για κάθε $a\in R$, θέτομε $E_a=\left\{f\in C[-1,1]: f(0)=a\right\}$.

Αποδείξτε ότι κάθε E_a είναι κυρτό και πυκνό υποσύνολο του $L^2[-1,1]$. Αν $a\neq b$, αποδείξτε ότι τα E_a και E_b δεν διαχωρίζονται από κανένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $F:L^2[-1,1]\to R$.

[<u>Υπόδειξη</u>. Ο χώρος $C[-1,1]$ είναι πυκνός στον $L^2[-1,1]$. Αποδείξτε ότι αν $a\in R$, $\varepsilon>0$ και $g\in C[-1,1]$ τότε υπάρχει $h\in C[-1,1]$ με $h(0)=a$ και $\int_{-1}^{1}|g-h|^2\,dt<\varepsilon^2$. Αν $g(0)=\beta$, βρείτε $\varphi\in C[-1,1]$ ώστε, $\varphi(0)=a-\beta$ και $\int_{-1}^{1}\varphi^2 dt\leq\varepsilon^2$. Κατόπιν θέσατε $h=g+\varphi$.]

9) Έστω ℓ_∞ ο χώρος Banach των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών. <u>Ένα όριο Banach</u> είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές $L:\ell_\infty\to R$ ώστε: (α) $L(x)\geq 0$, αν $x=(x_n)$ με $x_n\geq 0$ για κάθε $n\geq 1$.

(β) $L(x)=L(\sigma(x))$, όπου $\sigma:\ell_\infty\to\ell_\infty$ ο τελεστής της μεταφοράς (shift operator), δηλαδή $\sigma(x_1,x_2,...,x_n,...)=(x_2,x_3,...,x_n,...)$ και

(γ) $L(1,1,...,1,...)=1$. Αποδείξτε ότι:

(ι) Αν L είναι ένα όριο Banach και $x=(x_n)\in\ell_\infty$ τότε

$$\liminf_{n\to\infty} x_n\leq L(x)\leq\limsup_{n\to\infty} x_n$$

(ιι) Όρια Banach υπάρχουν.

[Υπόδειξη Για το (ι): Επειδή $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\inf\left\{x_k:k\geq n\right\})$

και $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\left\{x_k:k\geq n\right\}\right)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι,

$\inf\left\{x_n:n\geq 1\right\}\leq L(x)\leq\sup\left\{x_n:n\geq 1\right\}$.

Για το (ιι): Έστω c ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞ των συγκλινουσών ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $\ell : c \to R$ ώστε $\ell(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x = (x_n) \in c$ και το υπογραμμικό συναρτησοειδές $p : \ell_\infty \to R$ ώστε

$$p(x) = \lim_{n\to\infty}\sup \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \; x = (x_n) \in \ell_\infty .$$

Εφαρμόστε το θεώρημα Hahn- Banach για το ζεύγος ℓ, p .]

10) Αποδείξτε ότι ο χώρος $C^\infty(I)$ του παραδείγματος 3.4.3 είναι διαχωρίσιμος

[Υπόδειξη . Εξετάστε τα πολυώνυμα]