Ασκήσεις

1) Έστω E τ.δ.χ., αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε κυρτό υποσύνολο A του E είναι συνεκτικό. Ιδιαίτερα ο E είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος.

(b) Κάθε ισορροπημένο υποσύνολο A του E είναι συνεκτικό. Ιδιαίτερα ο E είναι τοπικά συνεκτικός (δηλαδή, κάθε $x \in E$ έχει μια βάση περιοχών από συνεκτικά σύνολα).

[Υπόδειξη (α) Αν $a \in A$ τότε $A = \bigcup_{x \in A} [a, x]$. Παρατηρούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[a,b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\}$ σε ένα τ.δ.χ. είναι συνεκτικό. (b) Αν A ισορροπημένο $\neq \varnothing$ τότε $A = \bigcup_{x \in A} [0, x]$].

2) Έστω (E,T) τ.δ.χ. και d μια αναλλοίωτη για τις μεταφορές μετρική η οποία μετρικοποιεί τον (E,T).

Αποδείξτε ότι : (α) $d(nx,0) = nd(x,0), x \in E, n \geq 1$.

(b) Αν $(x_n) \subseteq E$ ώστε $x_n \to 0$ τότε υπάρχουν θετικοί πραγματικοί $\lambda_n > 0, n \geq 1$, ώστε $\lambda_n \to +\infty$ και $\lambda_n x_n \to 0$.

[Υπόδειξη (α) $d(nx,0) \leq \sum_{k=1}^{n} d(kx,(k-1)x) = nd(x,0)$

(b) $d(x_n,0) \to 0$, άρα υπάρχει μια υπακολουθία $(n_k) \subseteq N$ ώστε $d(x_n,0) < \frac{1}{k^2}, n \geq n_k$.
Θέτομε $\lambda_n = 1$ αν $n < n_1$ και $\lambda_n = k$ αν $n_k \leq n < n_{k+1}$. Τότε
$d(\lambda_n x_n, 0) = d(kx_n, 0) \leq kd(x_n, 0) < \frac{1}{k}$]

3) (α) Έστω E διανυσματικός χώρος και $p : E \to R$ ημινόρμα. Θέτομε $F = p^{-1}(\{0\})$. Αποδείξτε ότι ο F είναι διανυσματικός υπόχωρος του E και αν $\pi : E \to E/F$ είναι η κανονική απεικόνιση τότε η απεικόνιση $\tilde{p} : E/F \to R : \tilde{p}(\pi(x)) = p(x), x \in E$, είναι μια νόρμα επί του E/F.

(b) Έστω E ο χώρος των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to R$. Αν $p(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$, ποιος είναι ο χώρος πηλίκο $(E/F, \tilde{p})$;

4) Έστω $\{p_i, i \in I\}$ οικογένεια ημινορμών επί του διανυσματικού χώρου E. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\sup\{p_i(x): i \in I\} < +\infty, \forall x \in E$ τότε η $p(x) = \sup\{p_i(x): i \in I\}, x \in E$ είναι ημινόρμα.

(b) Αν $\{p_1,...,p_n\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο ημινορμών επί του E τότε η $p(x) = \max\{p_k(x): 1 \le k \le n\}, x \in E$ είναι ημινόρμα.

5) Έστω p οικογένεια ημινορμών επί του διανυσματικού χώρου E. Συμβολίζουμε με $\Delta = \Delta(p)$ την μικρότερη οικογένεια ημινορμών επί του E, η οποία περιέχει την p και είναι κλειστή για την πράξη max (αν $p_1, p_2 \in \Delta$ τότε $p = \max(p_1, p_2) \in \Delta$).

α) Αποδείξτε ότι οι τοπολογίες $T(p)$ και $T(\Delta)$ συμπίπτουν επί του E.

b) Έστω $\Lambda: E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι Λ είναι συνεχής απεικόνιση αν και μόνο αν υπάρχει $p \in \Delta$ και $M > 0$ ώστε $|\Lambda(x)| \le Mp(x), \forall x \in E$.

6) Μια ακολουθία (x_n) σ' ένα τ.δ.χ. (E,T) λέγεται T-Cauchy αν για κάθε περιοχή U του $0 \in E$ υπάρχει $n_0 \in N: n > m \ge n_0 \Rightarrow x_n - x_m \in U$. Υποθέτομε ότι η τοπολογία του E μετρικοποιείται από μια αναλλοίωτη για τις μεταφορές μετρική d. Αποδείξτε ότι μια ακολουθία $(x_n) \subseteq E$ είναι T-Cauchy $\Leftrightarrow$ η (x_n) είναι $d-$ Cauchy.

7) Έστω (E,T) τ.δ.χ. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $(x_n) \subseteq E$ είναι T-Cauchy ακολουθία τότε το σύνολο $\{x_n : n \ge 1\}$ είναι φραγμένο.

(β) Ένα υποσύνολο $A \subseteq E$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $(x_n) \subseteq A$ για κάθε $(a_n) \subseteq K$ με $a_n \to 0$ συνεπάγεται $a_n x_n \to 0$.

(γ) Ένα υποσύνολο $A \subseteq E$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο B του A είναι φραγμένο.

8) Αποδείξτε ότι κάθε Hausdorff τοπικά κυρτός χώρος (E,T) είναι τελείως κανονικός $\left(\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}\right)$.

[<u>Υπόδειξη</u>. Έστω $T = T(p)$, όπου p είναι μια οικογένεια ημινορμών που διαχωρίζει τα σημεία του E. Έστω $x \in E$ και $U \subseteq E$ ανοικτή περιοχή του x. Έστω $\Delta \subseteq p$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\Delta(x,\varepsilon) \subseteq U$. Θέτομε $q = \max \Delta$ τότε q συνεχής ημινόρμα και η συνάρτηση $f(y) = \min\{1, \varepsilon^{-1} q(y-x)\}$ είναι συνεχής ώστε $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $x \in E \setminus U$].

9) Οι ημινόρμες $p_n(f)=\sup\{|f(t)|:t\le n\}, n\ge 1$, ορίζουν την μετρική,

$d(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$, η οποία μετρικοποιεί την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του R στον χώρο $C(R)$ των συνεχών συναρτήσεων $f:R\to R$. Ορίζουμε, $f(x)=\max\{0,1-|x|\}, g(x)=100f(x-2)$ και $2h=f+g$. Υπολογίστε τις ακόλουθες ποσότητες:

$d(f,0)=\frac{1}{2}, d(g,0)=\frac{50}{101}$ και $d(h,0)=\frac{1}{6}+\frac{50}{102}$.

Συμπεράνατε ότι η $d-$ σφαίρα $\hat{B}_d\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left\{\varphi\in C(R):d(\varphi,0)\le\frac{1}{2}\right\}$ δεν είναι κυρτό σύνολο. Υπάρχει $0<r<1$ ώστε η σφαίρα $\hat{B}_d(0,r)$ να είναι κυρτό σύνολο;

10) Έστω (E,T) τοπικά κυρτός χώρος και $(x_n)\subseteq E$ με $x_n\to 0$. Αποδείξτε ότι, η ακολουθία $y_n=\frac{x_1+...+x_n}{n}\to 0$.

11) Έστω $C[0,1]$ ο χώρος Banach των συνεχών συναρτήσεων $f:[0,1]\to C$ με την sup-norm. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\Lambda\in C[0,1]^*$ ώστε $\Lambda(B)$ ανοικτό υποσύνολο του C, όπου B = η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του $C[0,1]$.

[<u>Υπόδειξη</u>: Έστω $\Lambda:C[0,1]\to C$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές με $\Lambda\ne 0$. Τότε το $\Lambda(B)$ είναι ισορροπημένο και φραγμένο υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου C και άρα είναι ένας δίσκος (ανοικτός ή κλειστός) με κέντρο το $0\in C$ και ακτίνα $r=\|\Lambda\|$

Αν το Λ δεν επιτυγχάνει την νόρμα του επί του B, δηλαδή $|\Lambda(f)|<\|\Lambda\|, \forall f\in B$ τότε $\Lambda(B)=B(0,\|\Lambda\|)=\{z\in C:|z|<\|\Lambda\|\}$. Ένα παράδειγμα τέτοιου συναρτησοειδούς είναι το ακόλουθο: Έστω (t_n) μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$, θέτομε

$\Lambda(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(t_n)-f(0)}{2^{n+1}}, f\in C[0,1]$. [Πρβλ. επίσης και την άσκηση (2) μετά την παράγραφο 2.]

12) Έστω $K\subseteq R^n$ κυρτό και απορροφούν σύνολο. Αποδείξτε ότι το K είναι περιοχή του $0\in R^n$, όπου ο R^n θεωρείται με την τοπολογία της (Ευκλείδειας) νόρμας.

[<u>Υπόδειξη</u>. Αποδείξτε πρώτα το αποτέλεσμα για $n \leq 2$. Αν $n=2$ τότε υπάρχει $\lambda > 0$, ώστε $\lambda \cdot co(\pm e_1, \pm e_2) \subseteq K$, όπου $e_1 = (1,0)$ και $e_2\,(0,1)$.]

13) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Αν $B, \hat{B}$ είναι η ανοικτή και η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του X αποδείξτε ότι $p_B = p_{\hat{B}} = \|\cdot\|$.

(β) Αν $U \subseteq X$ ανοικτό κυρτό ισορροπημένο και φραγμένο τότε το συναρτησοειδές του Minkowski p_U είναι μια ισοδύναμη νόρμα επί του X.

14) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(α) Αποδείξτε ότι η ασθενής τοπολογία T_W του X δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

(β) Αποδείξτε ότι η ασθενής * τοπολογία T_{W^*} του X^* είναι μετρικοποιήσιμη αν και μόνο αν ο X έχει αριθμήσιμη αλγεβρική διάσταση (έχει μια αριθμήσιμη βάση Hamel).

Συμπεράνατε ότι αν ο X είναι χώρος Banach τότε η ασθενής * τοπολογία του X^* δεν είναι μετρικοποιήσιμη. Δώστε ένα παράδειγμα χώρου με νόρμα με αριθμήσιμη αλγεβρική διάσταση.

[<u>Υπόδειξη</u>: Για το (α) : Έστω (x_n) ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στον X με $\|x_n\| = 1, n \geq 1$. Θέτομε $F_n = \langle x_1, ..., x_n \rangle$ και $F_0 = \{0\}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, προχωρώντας με επαγωγή βρίσκουμε μια ακολουθία $(f_n) \subseteq X^*$ ώστε $\|f_n\| = 1, f_n |_{F_{n-1}} = 0$ και $f_n(x_n) = d(x_n, F_{n-1}) > 0, n = 1, ..., n$. Η ακολουθία (f_n) είναι γραμμικά ανεξάρτητη στο χώρο Banach X^* και συνεπώς από το θεώρημα του Baire ο X^* έχει υπεραριθμήσιμη αλγεβρική διάσταση. Η απόδειξη του γεγονότος ότι ο (X, T_W) δεν είναι μετρικοποιήσιμος είναι ανάλογη με την απόδειξη του αντίστοιχου αποτελέσματος που περιγράφεται στο παράδειγμα 3.3.17 και χρησιμοποιεί την πρόταση 3.3.18. Η απόδειξη του ισχυρισμού (β) κινείται σε ανάλογες γραμμές.]

15) Έστω $C[0,1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f:[0,1] \to R$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο T_p. Αποδείξτε ότι ο $(C[0,1], T_p)$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος

16) Στον διανυσματικό χώρο $E = K^\Gamma$ ορίζουμε την τοπολογία της <u>ομοιόμορφης σύγκλισης</u> T_u που έχει ως βάση $\mathcal{B}$ τα σύνολα της μορφής $V_{f,\varepsilon} = \left\{ g \in E : \sup_{x \in \Gamma} |f(x) - g(x)| < \varepsilon \right\}$, $f \in E, \varepsilon > 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η B είναι πράγματι μια βάση για την T_u και δικαιολογείστε την ορολογία « τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης».

(β) Είναι η τοπολογία T_u συμβατή με την διανυσματική δομή του E ;

[Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι αν το $f \in E$ τότε $V_{f,\varepsilon} = f + B(0,\varepsilon)$ όπου $B(0,\varepsilon) = \left\{ g \in \ell_\infty(\Gamma) : \|g\|_\infty < \varepsilon \right\}$ και ακόμη ότι οι περιοχές του $0 \in E$ δεν είναι απορροφούσες , αν το Γ είναι άπειρο σύνολο.]

17) Έστω E διανυσματικός χώρος F διανυσματικός υπόχωρος του E και $\pi : E \to E/F$ η κανονική απεικόνιση.

(α) Αν p ημινόρμα επί του E και θέσομε για κάθε $\hat{x} \in E/F$,

$\hat{p}\left(\hat{x}\right) = \inf\left\{ p(z) : \pi(z) = \hat{x} \right\}$ τότε η $\hat{p}$ είναι ημινόρμα επί του E/F .

(β) Έστω (E,τ) τοπικά κυρτός χώρος και P οικογένεια ημινορμών επί του E η οποία ορίζει την τοπολογία του E ($\tau = \tau(p)$). Αποδείξτε ότι η τοπολογία πηλίκο επί του χώρου E/F ορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $\hat{p} = \left\{ \hat{p} : p \in P \right\}$.

[Υπόδειξη Πρβλ. την άσκηση 8 της παραγράφου 3.1]