Ασκήσεις

1) Ένα υποσύνολο A ενός διανυσματικού χώρου E λέγεται απόλυτα κυρτό αν $\forall x, y \in A, \forall \lambda, \mu \in K$ με $|\mu| + |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in A$.

(ι) Δείξτε ότι η τομή μιας οικογένειας απόλυτα κυρτών συνόλων είναι απόλυτα κυρτό σύνολο.

(ιι) Δείξτε ότι ένα σύνολο $A \subseteq E$ είναι απόλυτα κυρτό αν και μόνο αν είναι κυρτό και ισορροπημένο.

(ιιι) Αν $A \subseteq E$ απόλυτα κυρτό, τότε A απορροφούν αν και μόνο αν $\langle A \rangle = E$.

2) Έστω E διανυσματικός χώρος και $A \subseteq E$. Η τομή των ισορροπημένων (αντιστοίχως των κυρτών ή των απόλυτα κυρτών) υποσυνόλων του E που περιέχουν το A ονομάζεται η ισορροπημένη (αντιστοίχως κυρτή ή απόλυτα κυρτή) θήκη του A και συμβολίζεται με $b(A)$ (αντιστοίχως $co(A)$ ή $aco(A)$). Αποδείξτε ότι:

(ι) $b(A) = \{\lambda A : \lambda \in K, |\lambda| \leq 1\} \left(= \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A \right)$.

(ιι) $co(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, n \in N \right\}$.

(ιιι) $aco(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \in K, \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq 1, n \in N \right\}$.

(ιν) Αν A ισορροπημένο, τότε $co(A)$ ισορροπημένο.

(ν) Ισχύει ότι $aco(A) = co(b(A))$.

3) Έστω E, F διανυσματικοί χώροι, $T : E \to F$ γραμμική απεικόνιση, $A \subseteq E$ και $B \subseteq F$. Αποδείξτε ότι:

(ι) Αν A και B απορροφούντα τότε τα $T(A)$ και $T^{-1}(B)$ είναι απορροφούντα υποσύνολα των $T(E)$ και E αντίστοιχα

(ιι) Αν τα A και B ισορροπημένα, τότε τα $T(A)$ και $T^{-1}(B)$ ισορροπημένα.

(ιιι) Αν τα A και B κυρτά (αντιστοίχως απόλυτα κυρτά), τότε τα $T(A)$ και $T^{-1}(B)$ κυρτά (αντιστοίχως απόλυτα κυρτά).

4) Αποδείξτε ότι ένα απορροφούν υποσύνολο του χώρου R^2 δεν είναι κατ' ανάγκη περιοχή του $(0,0) \in R^2$.

[Υπόδειξη. Θεωρούμε την απλή καμπύλη $\gamma(t)=\dfrac{t}{2\pi}e^{it}, t\in[0,2\pi]$ του R^2 και θέτομε $D=\{\lambda\gamma(t):\lambda\in[0,1], t\in[0,2\pi]\}$. Τότε, το $(0,0)$ ανήκει στο σύνορο ∂D του D (άρα)δεν ανήκει στο εσωτερικό D^o του D και το D είναι απορροφούν υποσύνολο του R^2].

5) Έστω $B=\{(z,w)\in C^2:|z|\le|w|\}$. Αποδείξτε ότι το B είναι ισορροπημένο υποσύνολο του C^2 αλλά το εσωτερικό του δεν είναι.(Πρβλ. την Προταση 3.14 (ιχ) .)

6) Έστω E,F τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι και $T:E\to F$ γραμμική και συνεχής απεικόνιση.
(ι) Αποδείξτε ότι η T είναι ομοιόμορφα συνεχής υπό την ακόλουθη έννοια: Για κάθε περιοχή V του $0\in F$ υπάρχει περιοχή U του $0\in E$ ώστε, $T(y)-T(x)\in V, \forall x,y\in E$ με $y-x\in U$.
(ιι) Ένα δίκτυο $(x_i)_{i\in I}$ στον τ.δ.χ. E λέγεται δίκτυο Cauchy, αν για κάθε περιοχή U του $0\in E$ υπάρχει $i_0\in I$ τέτοιο ώστε $x_i-x_j\in U$ για κάθε $i,j\ge i_0$. Αποδείξτε ότι η εικόνα $(T(x_i))_{i\in I}$ ενός δικτύου Cauchy $(x_i)_{i\in I}$ στον τ.δ.χ. E μέσω μιας συνεχούς και γραμμικής απεικόνισης $T:E\to F$ είναι δίκτυο Cauchy στον F. Επίσης αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνον δίκτυο στον E είναι δίκτυο Cauchy.

7) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff). Αποδείξτε τα ακόλουθα.
(ι) Κάθε μονοδιάστατος υπόχωρος του E είναι κλειστός στον E.
(ιι) Αν F είναι διανυσματικός υπόχωρος του E με $\dim F=n\in N$, τότε κάθε αλγεβρικός ισομορφισμός Λ του K^n επί του F (ο K^n με την τοπολογία της νόρμας) είναι και ομοιομορφισμός. Περαιτέρω αποδείξτε ότι ο F είναι κλειστός στον E.
(ιιι) Αν E είναι διανυσματικός χώρος με $\dim E<\infty$, τότε υπάρχει μοναδική Hausdorff τοπολογία επί του E συμβατή με την διανυσματική δομή του.
[Υπόδειξη. (ι) Έστω F διανυσματικός υπόχωρος του E με $\dim F=1$. Τότε $F=\langle a\rangle=\{\lambda a:\lambda\in K\}$ για κάποιο $a\in E$ με $a\neq 0$. Η απεικόνιση $\varphi:K\to F:\varphi(\lambda)=\lambda a$ είναι αλγεβρικός ισομορφισμός ο οποίος είναι και ομοιομορφισμός σύμφωνα με το πόρισμα 3.1.12. …….
Δείξτε ότι ο F είναι κλειστός χρησιμοποιώντας την έννοια του δικτύου Cauchy της άσκησης 6. Για το (ιι) προχωρήστε με επαγωγή στο $n=\dim F$.]

8) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff) F διανυσματικός υπόχωρος του E και $\pi:E\to E/F$ η κανονική απεικόνιση. Θεωρούμε στον χώρο πηλίκο E/F την τοπολογία πηλίκο T (αν $U\subseteq E/F$ τότε $U\in T \Leftrightarrow$ το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον E). Αποδείξτε ότι:
(ι) Η π είναι συνεχής και ανοικτή.
(ιι) Ο χώρος πηλίκο E/F είναι με την τοπολογία T τ.δ.χ.
(ιιι) Ο χώρος πηλίκο είναι Hausdorff αν και μόνο αν ο F είναι κλειστός στον E.
(ιv) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα τότε η T ταυτίζεται με την τοπολογία της νόρμας πηλίκο του χώρου E/F.

9) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff), M κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του E και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E. Αποδείξτε ότι:
(α) Ο υπόχωρος $F+M$ είναι κλειστός στον E.
(β) Το άθροισμα $K+F$ ενός συμπαγούς K και ενός κλειστού F υποσυνόλου του E είναι κλειστό υποσύνολο του E.

10) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff) και F διανυσματικός υπόχωρος του E. Λέμε ότι ο F είναι (τοπολογικά) συμπληρωματικός στον E αν υπάρχει συνεχής προβολή $P: E \to E$ ώστε $P(E)=F$.
(ι) Αποδείξτε ότι αν ο F είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του E τότε ο F είναι κλειστός στον E.
(ιι) Έστω $P: E \to E$ προβολή με $P(E)=F$ και $G = KerP$, άρα $E = F \oplus G$. Αποδείξτε ότι η P είναι συνεχής αν και μόνο αν η φυσιολογική απεικόνιση $F \times G \ni (x, y) \to x + y \in E$ είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν η απεικόνιση $j: E/G \to F : j(x+G) = P(x)$ είναι συνεχής (παρατηρούμε ότι $P = jo\pi$, όπου $\pi : E \to E/G$ η κανονική απεικόνιση).
(ιιι) Υποθέτομε ότι ο F είναι κλειστός υπόχωρος του E πεπερασμένης συνδιάστασης. Αποδείξτε ότι ο F είναι (τοπολογικά) συμπληρωματικός στον E.
(ιν) Αν ο E είναι επί πλέον τοπικά κυρτός τ.δ.χ. ,τότε κάθε διανυσματικός υπόχωρος του E πεπερασμένης διάστασης είναι συμπληρωματικός στον E. (Η έννοια της τοπικής κυρτότητας για ένα τ.δ.χ. θα ορισθεί στην επόμενη παράγραφο).

11) Έστω E τ.δ.χ. και $A \subseteq E$ κυρτό. Αποδείξτε ότι:
(α) Αν $x \in A^o$ και $y \in \overline{A}$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y) \subseteq A^o$ (όπου $[x, y) = \{\lambda x + (1-\lambda) y : 0 < \lambda \le 1\}$)
(β) Αν $A^o \neq \varnothing$, τότε $\overline{A} = \overline{A^O}$ και $A^o = \left(\overline{A}\right)^o$.

[<u>Υπόδειξη για το</u> (α): Έστω $z = (1-\lambda) y + \lambda x$ με $0 < \lambda < 1$. Υπάρχει τότε U ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ ώστε $x + U \subseteq A$. Υποθέτομε πρώτα ότι $y \in A$. Έστω $w \in \lambda U + z$, επομένως $w = \lambda u + z$ με $u \in U$. Τότε $x + u \in A$, επομένως $w = (1-\lambda) y + \lambda (x+u) \in A$. Έτσι έχουμε $\lambda U + z \subseteq A$ και άρα $z \in A^o$. Ας υποθέσομε τώρα ότι $y \in \overline{A}$. Θέτομε $V = \mu U + y$, όπου $\mu = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$. Έστω $a \in A \bigcap V$. Έχομε τότε $a = \mu u + y$ με $u \in U$ και επομένως $z = (1-\lambda) a + \lambda (x-u) \in A$. Έτσι έχομε ότι $[x, y) \subseteq A$, το οποίο μαζί με το πρώτο μέρος συμπεραίνει ότι $[x, y) \subseteq A^o$].

<u>Σημείωση.</u> Το δεύτερο μέρος της άσκησης 11 δεν ισχύει αν το κυρτό σύνολο A έχει κενό εσωτερικό. Για παράδειγμα έστω E χώρος Banach και A γνήσιος πυκνός διανυσματικός υποχώρος του E, είναι τότε σαφές ότι το A δεν ικανοποιεί το συμπέρασμα της 11) (β).