3.5 Το θεώρημα Hahn-Banach σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

Εξετάζουμε καταρχήν τη σχέση μεταξύ ενός μιγαδικού διανυσματικού χώρου E και του υποκείμενου πραγματικού χώρου E_R.

Έστω E μιγαδικός διανυσματικός χώρος $(K = C)$ και $f : E \to C$ γραμμικό συναρτησοειδές. Αν u είναι το πραγματικό μέρος του f (δηλαδή, $u(x) = \mathrm{Re}\, f(x), x \in E$) τότε το u είναι $R-$γραμμικό επί του E (δηλαδή, $u(x+y) = u(x) + u(y)$ και $u(\lambda x) = \lambda u(x), x, y \in E, \lambda \in R$) και ισχύει ότι

$$f(x) = u(x) - iu(ix), x \in E \quad (1)$$

(Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $z \in C$ τότε, $z = \mathrm{Re}\, z - i\,\mathrm{Re}(iz)$.)

Αντίστροφα, αν $u : E \to R$ είναι $R-$γραμμικό συναρτησοειδές και το f ορίζεται από την (1) τότε το f είναι $C-$γραμμικό (δηλαδή, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ και $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $x, y \in E$, $\lambda \in C$).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο μιγαδικός χώρος E είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Οι παραπάνω παρατηρήσεις έχουν ως συνέπεια ότι αν $f : E \to C$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές τότε το f είναι συνεχής συνάρτηση ($f \in E^*$) αν και μόνο αν το πραγματικό του μέρος $u : E \to R$ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Επίσης ότι κάθε συνεχές $R-$ γραμμικό συναρτησοειδές $u : E \to R$ είναι το πραγματικό μέρος ενός (μοναδικού) συνεχούς συναρτησοειδούς $f : E \to C$.

Παρατηρούμε ότι κάθε μιγαδικός χώρος E μπορεί να θεωρηθεί ως πραγματικός χώρος, συμβολιζόμενος συνήθως με E_R, περιορίζοντας τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό στο $R \times E$.

Έτσι στον τ.δ.χ. (E, T) επί του σώματος των μιγαδικών C αντιστοιχούμε τον τ.δ.χ. (E_R, T) επί του σώματος των πραγματικών R . Σημειώνουμε ότι ως τοπολογικοί χώροι

(τοπολογικές ομάδες) οι δομές (E, T) και (E_R, T) ταυτίζονται. Για παράδειγμα αν K είναι συμπαγής και Hausdorff τότε ο χώρος Banach $\left(C_C(\mathrm{K}), \|\cdot\|_\infty\right)$ έχει ως υποκείμενο πραγματικό χώρο το τοπολογικό ευθύ άθροισμα

$$E_R = C_R(\mathrm{K}) \oplus C_R(\mathrm{K}),$$

δηλαδή τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathrm{K} \to R^2$, με νόρμα $\|f\| = \sqrt{\|f_1\|_\infty^2 + \|f_2\|_\infty^2}$, όπου $f = (f_1, f_2)$. Προφανώς οι μετρικοί χώροι $\left(C_C(\mathrm{K}), \|\cdot\|_\infty\right)$ και $(E, \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικοί. Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι υπάρχει μια $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των (συνεχών) γραμμικών συναρτησοειδών $f : E \to C$ και των (συνεχών) γραμμικών συναρτησοειδών $u = \mathrm{Re}\, f : E_R \to R$.

Υπενθυμίζουμε την αναλυτική μορφή του θεωρήματος Hahn-Banach για πραγματικούς διανυσματικούς χώρους.

<u>Θεώρημα (Hahn-Banach) 3.5.1</u> Έστω E διανυσματικός χώρος επί του R και M διανυσματικός υπόχωρος του E. Έστω $p : E \to R$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Αν $f : M \to R$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $f(x) \le p(x),\ x \in M$, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda : E \to R$ ώστε, $\Lambda(x) = f(x)$, $x \in M$ και $\Lambda(x) \le p(x)$, $x \in E$.

Η αναλυτική μορφή του θεωρήματος Hahn-Banach ούτως ώστε να συμπεριλαμβάνει τους μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους είναι η ακόλουθη.

<u>Θεώρημα 3.5.2</u> (Hahn-Banach-Αναλυτική μορφή). Έστω E διανυσματικός χώρος επί του K, M διανυσματικός υπόχωρος του E, $p : E \to R$ ημινόρμα και $f : M \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $|f(x)| \le p(x),\ x \in M$.

Τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές Λ ώστε $\Lambda(x) = f(x)$, $x \in M$ και $|\Lambda(x)| \le p(x)$, $x \in E$.

<u>Απόδειξη</u> (Ι) Έστω $K = R$. Από το θεώρημα Hahn-Banach (θεώρημα 3.5.1) υπάρχει γραμμική επέκταση $\Lambda : E \to R$ ώστε $\Lambda(x) \le p(x)$, $x \in E$. Συνεπώς $\Lambda(-x) \le p(-x) = p(x)$, $x \in E$. Έπεται ότι $-p(x) \le -\Lambda(-x) = \Lambda(x) \le p(x), x \in E \Leftrightarrow |\Lambda(x)| \le p(x),\ x \in E$.

(Ι Ι) Έστω $K = C$. Η συνάρτηση $u = \mathrm{Re}\, f$ είναι $R-$γραμμικό συναρτησοειδές επί του M με $u(x) \le |f(x)| \le p(x),\ x \in M$. Από το θεώρημα 3.5.1 υπάρχει $R-$γραμμικό συναρτησοειδές $U : E \to R$ που επεκτείνει το u ώστε $U(x) \le p(x),\ x \in E$.

Θεωρούμε το $C-$γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda : E \to C$ ώστε, $\Lambda(x) = U(x) - iU(ix)$, $x \in E$. Τότε το Λ επεκτείνει το f και αν $x \in E$ τότε υπάρχει $a \in C$ με $|a| = 1$ ώστε $|\Lambda(x)| = a\Lambda(x) = \Lambda(ax)$. Επειδή $\Lambda(ax) = U(ax) - iU(iax) \ge 0$ θα έχουμε ότι $\Lambda(ax) = U(ax)$. Επομένως $|\Lambda(x)| = \Lambda(ax) = U(ax) \le p(ax) = p(x)$.

<u>Πόρισμα 3.5.3</u> Έστω E διανυσματικός χώρος, $x_0 \in E$ και $p : E \to R$ ημινόρμα με $p(x_0) \ne 0$. Τότε υπάρχει $\Lambda : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές με $\Lambda(x_0) = p(x_0)$ και $|\Lambda(x)| \le p(x)$, $x \in E$.

<u>Απόδειξη</u> Θεωρούμε τον διανυσματικό υπόχωρο $M=\{\lambda x_0:\lambda\in K\}$ του E και το γραμμικό συναρτησοειδές $f:M\to K: f(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$. Παρατηρούμε ότι $|f(\lambda x_0)|=|\lambda|\,p(x_0)=p(\lambda x_0)$. Από το θεώρημα 3.5.2 υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda:E\to K$ που επεκτείνει το f ώστε $|\Lambda(x)|\le p(x)$, $x\in E$. Προφανώς $\Lambda(x_0)=f(x_0)=p(x_0)$.

…………………………………………………………

<u>Πόρισμα 3.5.4</u> Έστω $E(\neq\{0\})$ Hausdorff τοπικά κυρτός χώρος. Τότε ο E^* διαχωρίζει τα σημεία του E, δηλαδή για κάθε $x,y\in E$ με $x\neq y$ υπάρχει $\Lambda\in E^*$ ώστε $\Lambda(x)\neq\Lambda(y)$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x,y\in E$ με $x\neq y$, θέτομε $x_0=x-y\neq 0$. Η τοπολογία του E ορίζεται από μια οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$ σε τρόπο ώστε οι ημινόρμες της $\mathcal{P}$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις επί του E και να διαχωρίζουν τα σημεία του E (αφού ο E είναι Hausdorff). Έστω $p\in\mathcal{P}$ ώστε $p(x_0)\neq 0$. Από το πόρισμα 3.5.3 υπάρχει $\Lambda:E\to K$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $\Lambda(x_0)=p(x_0)$ και $|\Lambda(x)|\le p(x)$, $x\in E$. Επειδή η p είναι συνεχής ημινόρμα έπεται από το πόρισμα 3.3.4 ότι το Λ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές και έτσι το αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί.

………………………………………………………..

Πρόκειται στη συνέχεια να αποδείξουμε την <u>γεωμετρική μορφή</u> του θεωρήματος Hahn-Banach η οποία μας λέει ότι, σε ένα τοπικά κυρτό χώρο ένα κλειστό και κυρτό σύνολο A μπορεί να διαχωριστεί από ένα εξωτερικό σημείο (γενικότερα από ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο που δεν τέμνει το A) με ένα κλειστό υπερεπίπεδο.

Θα χρειαστούμε για την απόδειξη αυτού του σημαντικού αποτελέσματος δύο λήμματα.

<u>Λήμμα 3.5.6</u> Έστω E τ.δ.χ. και $\Lambda:E\to K$ γραμμικό συναρτησοειδές με $\Lambda\neq 0$. Τότε το Λ είναι <u>ανοικτή</u> απεικόνιση επί του K ($\Lambda(E)=K$).

<u>Απόδειξη</u> Εφόσον η Λ είναι γραμμική απεικόνιση αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε περιοχή U του $0\in E$ το $\Lambda(U)$ είναι περιοχή του $0\in K$. Έστω U ισορροπημένη περιοχή του $0\in E$, τότε το $\Lambda(U)$ είναι ισορροπημένο υποσύνολο του σώματος K και επειδή ($E=\bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ και) $\Lambda\neq 0$ θα υπάρχει $x_0\in U$ ώστε $\Lambda(x_0)\neq 0$. Έπεται ότι αν $K=R$ τότε το $\Lambda(U)$ είναι ένα μη τετριμμένο συμμετρικό περί το 0 διάστημα και αν $K=C$ ένας δίσκος κέντρου 0 με θετική ακτίνα. Σε κάθε περίπτωση το $\Lambda(U)$ είναι περιοχή του $0\in K$. Όσον αφορά το δεύτερο συμπέρασμα έπεται αμέσως από το γεγονός ότι το $\Lambda(E)$ είναι μη τετριμμένος (αφού $\Lambda\neq 0$) διανυσματικός υπόχωρος του K.

<u>Λήμμα 3.5.7</u>. Έστω E τοπικά κυρτός χώρος Hausdorff. Αν A και B είναι ξένα μη κενά κλειστά υποσύνολα του E ώστε το A είναι συμπαγές, τότε υπάρχει ανοικτή και κυρτή περιοχή V του $0 \in E$ ώστε $(A+V)\bigcap B = \varnothing$.

<u>Απόδειξη</u> Αν $x \in A$ τότε το $x \in E \setminus B$ το οποίο είναι ανοικτό σύνολο, συνεπώς υπάρχει περιοχή U_x του $0 \in E$ ώστε $x+U_x \subseteq E \setminus B \Leftrightarrow (x+U_x)\bigcap B = \varnothing$. Από την τοπική κυρτότητα του E και την συνέχεια της πρόσθεσης υπάρχει ανοικτή και κυρτή περιοχή V_x του 0 ώστε $V_x + V_x \subseteq U_x$. Η οικογένεια $\{x+V_x : x \in A\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς A, άρα υπάρχουν $x_1,\dots,x_n$ σημεία του A ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}\{x_k + V_{x_k} : k = 1,2,\dots,n\}$.

Παρατηρούμε ότι η ανοικτή και κυρτή περιοχή $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$ του 0 ικανοποιεί το συμπέρασμα. Πράγματι, έστω $a \in A$ και $x \in V$, τότε υπάρχει $k_0 \le n$ ώστε $a = x_{k_0} + y$ με $y \in V_{x_{k_0}}$. Έπεται ότι, $a + x = x_{k_0} + x + y \in x_{k_0} + V_{x_{k_0}} + V_{x_{k_0}} \subseteq x_{k_0} + U_{x_{k_0}}$.

Επομένως $a + x \notin B$.

<u>Θεώρημα 3.5.8</u> (Διαχωριστικό θεώρημα Hahn – Banach).

Έστω E τοπολογικός διανυσματικός χώρος Hausdorff και A, B ξένα <u>κυρτά</u> μη κενά υποσύνολα του E.

(α) Αν το A είναι <u>ανοικτό</u>, τότε υπάρχουν $\Lambda \in E^*$ και $\gamma \in R$ τέτοια ώστε

$$\operatorname{Re}\Lambda(x) < \gamma \le \operatorname{Re}\Lambda(y)$$

για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$.

(β) Αν το A είναι <u>συμπαγές</u>, το B είναι <u>κλειστό</u> και ο E <u>τοπικά κυρτός</u> τότε υπάρχουν $\Lambda \in E^*$ και $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ τέτοια ώστε

$$\operatorname{Re}\Lambda(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Lambda(y)$$

για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$. (Αν $K = R$ τότε $\operatorname{Re}\Lambda = \Lambda$.)

<u>Απόδειξη.</u> Είναι αρκετό να αποδείξουμε το θεώρημα για $K = R$. Αν $K = C$ και η περίπτωση $K = R$ έχει αποδειχθεί, τότε υπάρχει ένα συνεχές $R-$γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda_1 : E \to R$ το οποίο ικανοποιεί τους ισχυρισμούς (α) ή (β). Αν Λ είναι το (μοναδικό) $C-$γραμμικό συναρτησοειδές επί του E ώστε $\Lambda_1 = \operatorname{Re}\Lambda$, τότε $\Lambda \in E^*$. Έτσι στην συνέχεια υποθέτομε ότι $K = R$.

(α) Υποθέτομε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $0 \in A$. Θεωρούμε το συναρτησοειδές του Minkowski $p = p_U$ του ανοικτού και κυρτού συνόλου $U = A - B + y_0$ όπου y_0 κάποιο στοιχείο του B και παρατηρούμε ότι $0 \in U$. Ως γνωστόν έχουμε ότι $U = \{x \in E : p(x) < 1\}$ και αφού $y_0 \notin U$ έπεται ότι $p(y_0) \geq 1$ ($y_0 \notin U$ αφού $A \bigcap B = \varnothing$).

Έστω M ο υπόχωρος του E που ορίζεται ως (η ευθεία) $M = \{\lambda y_0 : \lambda \in R\}$. Ορίζουμε $f : M \to R$ ώστε, $f(\lambda y_0) = \lambda p(y_0)$ και παρατηρούμε ότι, $f(\lambda y_0) = \lambda p(y_0) \leq p(\lambda y_0)$, $\lambda \in R$ (αν $\lambda \geq 0$ τότε, $f(\lambda y_0) = \lambda p(y_0) = p(\lambda y_0)$, αν $\lambda < 0$ τότε, $f(\lambda y_0) = \lambda p(y_0) < 0 \leq p(\lambda y_0)$). Από το θεώρημα Hahn-Banach (θεώρημα 3.5.1)υπάρχει $\Lambda : E \to R$ γραμμικό συναρτησοειδές που επεκτείνει το f ώστε $\Lambda(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in E$. Επειδή το p είναι φραγμένο στην περιοχή U του μηδενός έπεται από την πρόταση 3.3.3 ότι είναι συνεχής απεικόνιση. Από το πόρισμα 3.3.4 έπεται ότι και το Λ είναι συνεχής απεικόνιση. (Πρβλ. και την παρατήρηση 3.3.5 .)

Επίσης αν $a \in A$ και $b \in B$ τότε $\Lambda(a-b)+1 \leq \Lambda(a-b) + p(y_0) = \Lambda(a-b) + \Lambda(y_0)$ $\leq p(a-b+y_0) < 1$, συνεπώς $\Lambda(a-b) = \Lambda(a) - \Lambda(b) < 0 \Rightarrow \Lambda(a) < \Lambda(b)$.

Έπεται ότι τα $\Lambda(A)$ και $\Lambda(B)$ είναι (ξένα κυρτά υποσύνολα του R και συνεπώς) ξένα <u>διαστήματα</u> με το $\Lambda(A)$ αριστερά του $\Lambda(B)$. Σημειώνουμε ότι επειδή Λ ανοικτή απεικόνιση το $\Lambda(A)$ είναι ανοικτό διάστημα. Θέτομε γ να είναι το δεξί άκρο του $\Lambda(A)$ και παρατηρούμε ότι ο αριθμός γ ικανοποιεί τον ισχυρισμό (α).

Αποδεικνύουμε τώρα τον ισχυρισμό (β) .

Αντικαθιστούμε το κυρτό και συμπαγές σύνολο A με το ανοικτό και κυρτό σύνολο $A+V$, όπου V είναι ανοικτή και κυρτή περιοχή του 0 ώστε $(A+V) \bigcap B = \varnothing$, τέτοια περιοχή V του 0 υπάρχει από το Λήμμα 3.5.7. Από τον ισχυρισμό (α), υπάρχει $\Lambda \in E^*$, $\Lambda \neq 0$, ώστε

$$\Lambda(A+V) \bigcap \Lambda(B) = \varnothing .$$

Τα σύνολα $\Lambda(A+V)$ και $\Lambda(B)$ είναι ξένα διαστήματα του R με το $\Lambda(A+V)$ ανοικτό και αριστερά του $\Lambda(B)$.

Επειδή το $\Lambda(A)$είναι συμπαγές διάστημα με $\Lambda(A) \subseteq \Lambda(A+V)$ έπεται το συμπέρασμα.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

…………………………………………

<u>Πόρισμα 3.5.9</u> Έστω E τοπικά κυρτός χώρος, M διανυσματικός υπόχωρος του E και $x_0 \in E$ ώστε $x_0 \notin \overline{M}$. Τότε υπάρχει $\Lambda \in E^*$ ώστε $\Lambda(x_0) = 1$ και $\Lambda(x) = 0$ για κάθε $x \in M$.

<u>Απόδειξη</u> Εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό (β) του θεωρήματος 3.5.8 με $A = \{x_0\}$ και $B = \overline{M}$, επομένως υπάρχει $\Lambda_1 \in E^*$ ώστε τα $\{\Lambda_1(x_0)\}$ και $\Lambda_1(M)$ είναι ξένα σύνολα. Αυτό επιβάλλει ο $\Lambda_1(M)$ να είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του σώματος K και επομένως $\Lambda_1(M) = \{0\}$ και $\Lambda_1(x_0) \neq 0$.

Θέτομε $\Lambda = \dfrac{\Lambda}{\Lambda_1(x_0)}$ και έχουμε το συμπέρασμα.

……………………………………….

<u>Παρατήρηση</u> Το αποτέλεσμα αυτό μας δίνει μια μέθοδο διαπραγμάτευσης κάποιων προβλημάτων προσέγγισης:

Για να αποδείξουμε ότι ένα $x_0 \in E$ βρίσκεται στην κλειστότητα κάποιου υποχώρου M του τοπικά κυρτού χώρου E , είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $\Lambda(x_0) = 0$ για κάθε $\Lambda \in E^*$ για το οποίο ισχύει ότι $\Lambda|_M = 0$

<u>Πόρισμα 3.5.10</u> Έστω E τοπικά κυρτός χώρος, M διανυσματικός υπόχωρος του E και $f : M \to K$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε υπάρχει $\Lambda \in E^*$ ώστε $\Lambda|_M = f$.

<u>Απόδειξη</u> Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $f \neq 0$. Θέτομε $M_0 = \{x \in M : f(x) = 0\}$ και επιλέγομε ένα $x_0 \in M$ ώστε $f(x_0) = 1$. Επειδή η f είναι συνεχής απεικόνιση το x_0 δεν ανήκει στην $M-$ κλειστότητα του M_0 ($x_0 \notin cl_M M_0$) και επομένως το x_0 δεν ανήκει στην E κλειστότητα του M_0 ($x_0 \notin \overline{M_0}$).

Από το πόρισμα 3.5.9 υπάρχει $\Lambda \in E^*$ ώστε $\Lambda(x_0) = 1$ και $\Lambda|_{M_0} = 0$. Αν $x \in M$, τότε $x - f(x)x_0 \in M_0$, επειδή $f(x_0) = 1$. Επομένως,
$\Lambda(x) - f(x) = \Lambda(x) - f(x)\Lambda(x_0) = \Lambda(x - f(x)x_0) = 0$. Από όπου συμπεραίνουμε ότι $\Lambda|_M = f$.(Πρβλ. και την Πρόταση 3.3.18 .)

Σημειώνουμε ότι μια άλλη απόδειξη του Πορ. 3.5.10, η οποία χρησιμοποιεί την αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn -Banach (Θεωρ.3.5.2), έπεται και από την άσκηση 5 της παραγρ. 3.3 .