3.3 Το συναρτησοειδές του Minkowski και μετρικοποιησιμότητα σε τοπικά κυρτούς χώρους.

Υπενθυμίζουμε ότι αν E διανυσματικός χώρος, μια συνάρτηση $p: E \to R$ λέγεται υπογραμμικό συναρτησοειδές αν

(ι) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\lambda \geq 0$ και $x \in E$ (θετική ομογένεια)

(ιι) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in E$ (υποπροσθετικότητα)

Παρατηρούμε ότι για ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές ισχύουν:

$p(0) = 0$ (αφού $p(0) = p(2\cdot 0) = 2p(0)$) και $-p(-x) \leq p(x)$ (αφού $0 = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x)$).

Παραδείγματα 3.3.1 (1) Κάθε ημινόρμα ή γραμμικό συναρτησοειδές είναι προφανώς υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(2) Έστω $\Gamma \neq \varnothing$ σύνολο τότε η συνάρτηση $p: \ell_\infty(\Gamma) \to R : p(f) = \sup\{ f(\gamma) : \gamma \in \Gamma \}$ είναι ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές (στον χώρο $\ell_\infty(\Gamma)$ των φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων επί του Γ, που δεν είναι ημινόρμα.

(3) Οι συναρτήσεις $p, q : \ell_\infty \to R : p(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n$ και $q(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, $x = (x_n) \in \ell_\infty$, είναι επίσης υπογραμμικά συναρτησοειδή

(στον χώρο των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών ℓ_∞) και δεν είναι ημινόρμες.

Πρόταση 3.3.2 Έστω E διανυσματικός χώρος και $p: E \to R$ υπογραμμικό συναρτησοειδές τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(ι) Για κάθε $\varepsilon > 0$ τα σύνολα $\mathrm{B}_p(0,\varepsilon) = \{ x \in E : p(x) < \varepsilon \}$ και $\hat{\mathrm{B}}_p(0,\varepsilon) = \{ x \in E : p(x) \leq \varepsilon \}$ είναι κυρτά.

(ιι) Αν επί πλέον $p \geq 0$, τότε τα $\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ και $\hat{\mathrm{B}}_p(0,\varepsilon)$ είναι και απορροφούντα.

Απόδειξη (ι) Έστω $x, y \in \mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ και $\lambda \in [0,1]$. Τότε έχουμε, $p(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda) y < \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon$, συνεπώς το σημείο $\lambda x + (1-\lambda) y \in \mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ και το $\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ είναι κυρτό. Η απόδειξη για την κυρτότητα του $\hat{\mathrm{B}}_p(0,\varepsilon)$ είναι όμοια.

(ιι) Έστω τώρα ότι ισχύει $p \geq 0$. Αν $x \in E$ και $0 \leq t \leq \dfrac{\varepsilon}{p(x)+2}$ τότε

$p(tx) = tp(x) \leq \dfrac{\varepsilon}{p(x)+2} \cdot p(x) < \varepsilon$. Άρα $tx \in \mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ και έτσι τα σύνολα $\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ και $\hat{\mathrm{B}}_p(0,\varepsilon)$ είναι απορροφούντα.

<u>Πρόταση</u> 3.3.3 Έστω E τ.γ.χ. και $p: E \to R$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(ι) Το p είναι συνεχής συνάρτηση.

(ιι) Το p είναι συνεχής στο $0 \in E$.

(ιιι) Το p είναι φραγμένο σε μια περιοχή του $0 \in E$.

(ιν) Το σύνολο $\mathrm{B}_p(0,1) = \{x \in E : p(x) < 1\}$ είναι (ανοικτή) περιοχή του $0 \in E$.

<u>Απόδειξη</u> (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Προφανές

(ιι) $\Rightarrow$ (ιιι) Επειδή p συνεχής στο 0 και $p(0) = 0$ υπάρχει περιοχή V του $0 \in E$ ώστε $p(V) \subseteq (-1,1) \Leftrightarrow |p(x)| < 1, \forall x \in V$.

(ιιι) $\Rightarrow$ (ιν) Έστω $\mathrm{M} > 0$ και V περιοχή του $0 \in E$ ώστε $|p(x)| < \mathrm{M}$ για κάθε $x \in V \Rightarrow p\left(\dfrac{1}{\mathrm{M}}V\right) \subseteq (-1,1)$. Επειδή το $\dfrac{1}{\mathrm{M}}V$ είναι περιοχή του $0 \in E$ και $\dfrac{1}{\mathrm{M}}V \subseteq \mathrm{B}_p(0,1)$ έχουμε το συμπέρασμα.

(ιν) $\Rightarrow$ (ιιι) Έστω V ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ ώστε $V \subseteq B_p(0,1)$. Αν $x \in V$ τότε $-x \in V$ άρα $p(-x) < 1$ και $p(x) < 1$. Επειδή $-p(-x) \leq p(x)$ έπεται ότι $-1 < -p(-x) \leq p(x) < 1$. Συνεπώς $p(V) \subseteq (-1,1)$.

(ιιι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεσή μας υπάρχουν $\mathrm{M} > 0$ και V περιοχή του 0 ώστε $|p(x)| < \mathrm{M}$ για κάθε $x \in V$, ισοδύναμα, $p(V) \subseteq (-\mathrm{M},\mathrm{M})$. Συνεπώς $p\left(\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{M}}V\right) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon)$ και η p είναι συνεχής στο 0.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Έστω $(x_a)_{a \in A}$ δίκτυο στον E ώστε $x_a \to x \in E$, τότε $x_a - x \to 0$ και $x - x_a \to 0$. Έπεται ότι $p(x_a - x) \to 0$ και $p(x - x_a) \to 0$. Από την υποπροσθετικότητα της p προκύπτει εύκολα ότι, $p(x) - p(x - x_a) \leq p(x_a) \leq p(x_a - x) + p(x)$ (1).

Πράγματι, $p(x_a)=p((x_a-x)+x)\leq p(x_a-x)+p(x)$ και
$p(x)=p((x-x_a)+x_a)\leq p(x-x_a)+p(x_a)$. Από όπου έπεται η (1).

Από την (1) έπεται προφανώς ότι $p(x_a)\to p(x)$ και η p είναι συνεχής στο (τυχόν) $x\in E$.

Πόρισμα3.3.4 Έστω E τ.δ.χ. , $T:E\to K$ γραμμικό συναρτησοειδές και $p:E\to R$ υπογραμμικό συναρτησοειδές (ιδιαίτερα το p είναι ημινόρμα) ώστε

$$|T(x)|\leq p(x), x\in E$$

Αν το p είναι συνεχής συνάρτηση τότε και το T είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.3.3 το p είναι φραγμένο σε μια περιοχή V του $0\in E$. Επομένως και το γραμμικό συναρτησοειδές T είναι φραγμένο στην V , έτσι από την πρόταση 3.1.8 έχουμε το συμπέρασμα.

Παρατήρηση 3.3.5 Αν ο τ.δ.χ. E είναι πραγματικός (δηλαδή $K=R$) τότε η υπόθεση

$$|T(x)|\leq p(x), x\in E \quad (1)$$

του προηγούμενου πορίσματος μπορεί να αντικατασταθεί από την

$$T(x)\leq p(x), x\in E \quad (2).$$

Πράγματι, από την ανισότητα (2) έπεται ότι $T(-x)\leq p(-x), x\in E$, επομένως

$$-p(-x)\leq -T(-x)=T(x)\leq p(x),\ x\in E \quad (3).$$

Έστω V ισορροπημένη περιοχή του $0\in E$ και $\mathrm{M}>0$ ώστε

$$|p(x)|<\mathrm{M}, \forall x\in V \quad (4).$$

Έπεται τότε από τις (3) και (4) ότι

$$|T(x)|<\mathrm{M}, \forall x\in V$$

και έτσι το T είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

Θα ορίσουμε τώρα μια πολύ σημαντική έννοια για την μελέτη των τοπικά κυρτών χώρων, την έννοια του συναρτησοειδούς του Minkowski . Αυτή ορίζεται για κάθε κυρτό

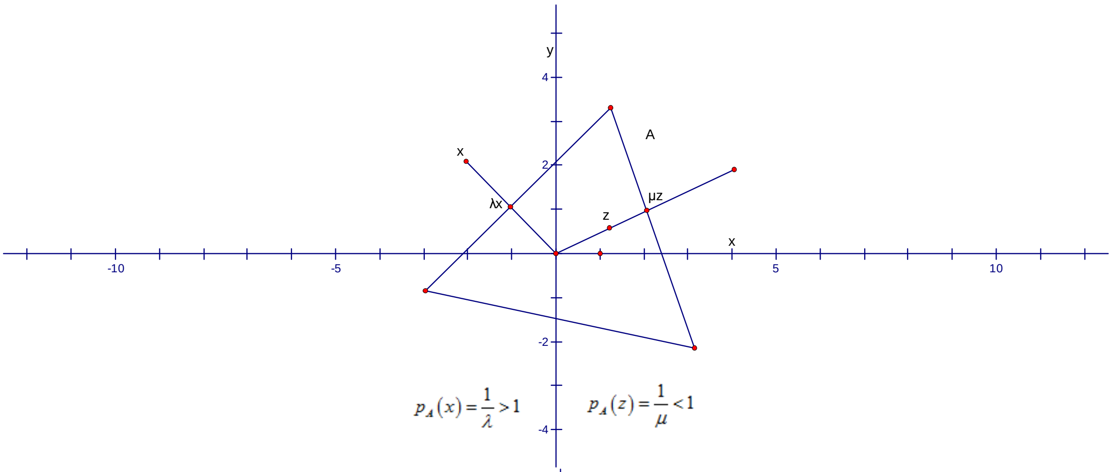
(ισορροπημένο) και απορροφούν υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου. Όπως θα διαπιστώσουμε οι ημινόρμες είναι ακριβώς τα συναρτησοειδή του Minkowski των κυρτών ισορροπημένων και απορροφούντων συνόλων.

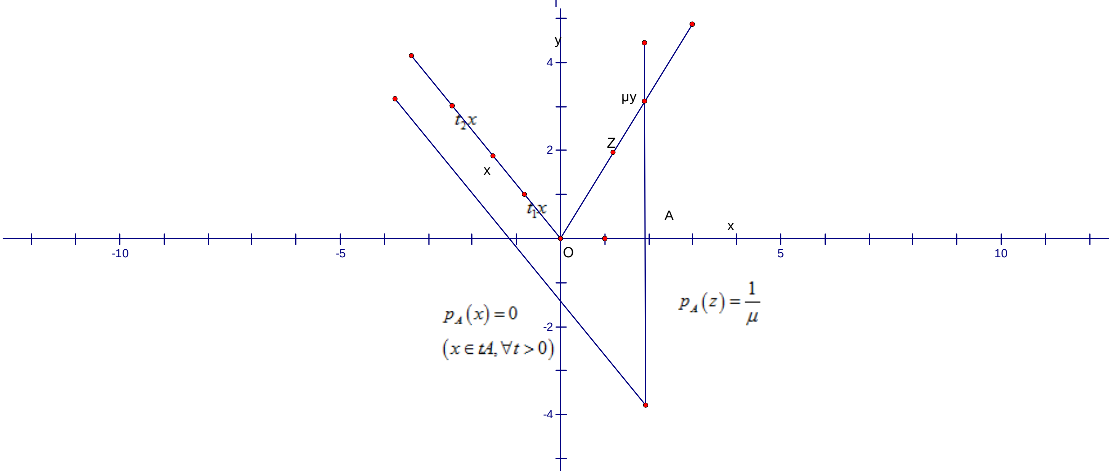
Ορισμός 3.3.6 Έστω E διανυσματικός χώρος και $A\subseteq E$ κυρτό και απορροφούν υποσύνολο του E. Για κάθε $x\in E$ θέτομε

$$p_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\} \quad \left(= \inf\left\{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\right\}\right)$$

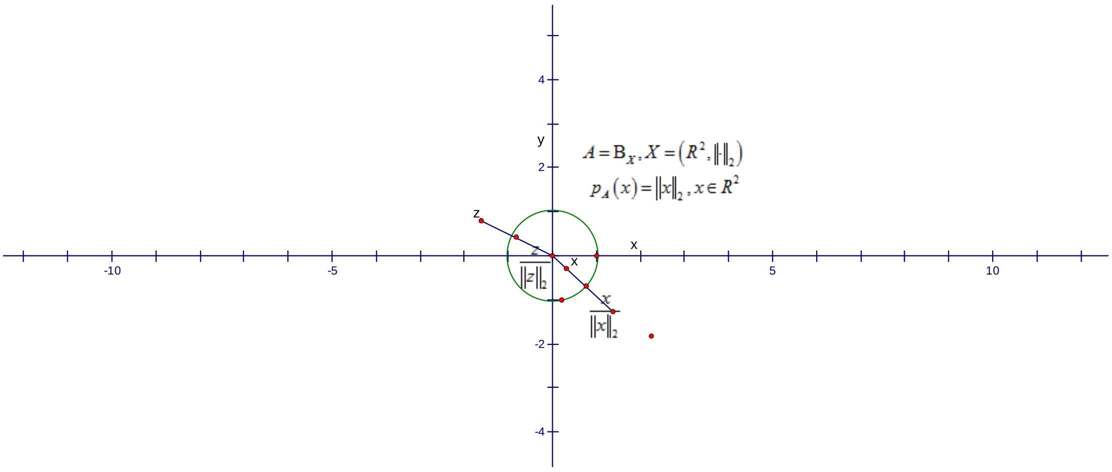
Η συνάρτηση $p_A : E \to [0, +\infty)$ είναι καλά ορισμένη αφού το A είναι απορροφούν υποσύνολο του E και ονομάζεται το <u>συναρτησοειδές του Minkowski</u> του συνόλου A.

Σε αδρές γραμμές, αν $x \neq 0$ ο αριθμός $p_A(x)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει τον λόγο της απόστασης του x από το 0 προς την απόσταση από το 0 του πιο απομακρυσμένου σημείου του A στην διεύθυνση του x, όπου αυτή η δεύτερη απόσταση μπορεί να είναι και άπειρη.





Σημειώνουμε ότι αν $\left(X,\|\cdot\|\right)$ είναι χώρος με νόρμα και $A=\mathrm{B}_X$ ή $\hat{\mathrm{B}}_X$ τότε $p_A\left(x\right)=\|x\|, x\in X$ (Άσκηση).



Θεώρημα 3.3.7 Έστω E διανυσματικός χώρος και $A\subseteq E$ κυρτό και απορροφούν σύνολο. Τότε,

(ι) Το p_A είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές (με $p_A\geq 0$).

(ιι) Αν $\mathrm{B}=\left\{x:p_A\left(x\right)<1\right\}$ και $C=\left\{x:p_A\left(x\right)\leq 1\right\}$, τότε $\mathrm{B}\subseteq A\subseteq C$ και $p_{\mathrm{B}}=p_A=p_C$

(ιιι) Αν το A είναι επιπλέον ισορροπημένο τότε το p_A είναι μια ημινόρμα.

Απόδειξη Για κάθε $x\in E$ θέτομε $H_A\left(x\right)=\left\{t>0:x\in tA\right\}$, τότε ισχύει ότι, $\left(p_A\left(x\right),+\infty\right)\subseteq H_A\left(x\right)\subseteq\left[p_A\left(x\right),+\infty\right), x\in E$. Ισοδύναμα για κάθε $t>0$ ισχύει, $p_A\left(x\right)<t\Rightarrow x\in tA\Rightarrow p_A\left(x\right)\leq t$ (1).

Η σχέση αυτή προκύπτει εύκολα από την παρατήρηση ότι αν A κυρτό με $0\in A$ τότε, $0\leq\lambda<\mu\Rightarrow\lambda A\subseteq\mu A$, καθώς και από τον ορισμό του $p_A\left(x\right)$. Παρατηρούμε ότι $p_A\left(x\right)=\inf H_A(x)$.

(ι) Έστω $x,y\in E$. Αν $t_1>0,t_2>0$ ώστε $x\in t_1A$ και $y\in t_2A$ τότε ,

$$x+y\in t_1A+t_2A=\left(t_1+t_2\right)\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}A+\frac{t_2}{t_1+t_2}A\right)\subseteq\left(t_1+t_2\right)A$$, αφού το A είναι κυρτό.

Έπεται ότι $p_A\left(x+y\right)\leq t_1+t_2$, από όπου συμπεραίνουμε ότι $p_A\left(x+y\right)\leq p_A\left(x\right)+p_A\left(y\right)$.

Έστω $s>0$ και $x\in E$, τότε

$$p_A\left(sx\right)=\inf\left\{t>0:sx\in tA\right\}=\inf\left\{t>0:x\in\frac{t}{s}A\right\}=\inf\left\{t's:t'>0 \text{ και } x\in t'A\right\}$$

$= s\cdot \inf\{t' : x \in t'A\} = s\cdot p_A(x)$. Αν $s=0$ τότε $p_A(0\cdot x) = p_A(0) = 0 = 0\cdot p_A(x)$. Έτσι έχουμε τον ισχυρισμό (ι).

(ιι) Η σχέση $B \subseteq A \subseteq C$ έπεται αμέσως από την (1) Από τη σχέση $B \subseteq A \subseteq C$ έπεται εύκολα ότι $p_C \leq p_A \leq p_B$. Πράγματι αν $x \in E$ και $x \in H_B(x) \Leftrightarrow x \in tB$
τότε $x \in tA \Leftrightarrow t \in H_A(x)$, δηλαδή $H_B(x) \leq H_A(x)$ από όπου έπεται ότι $p_A(x) \leq p_B(x)$, έτσι συμπεραίνουμε ότι $p_A \leq p_B$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $p_C \leq p_A$.

Για να αποδείξουμε την ισότητα, ας υποθέσουμε ότι $p_C(x) < s < t$. Τότε $x \in sC \Leftrightarrow \dfrac{x}{s} \in C$ και άρα $p_A\left(\dfrac{x}{s}\right) \leq 1$ δηλαδή, $p_A(x) \leq s$. Έπεται ότι $p_A\left(\dfrac{x}{t}\right) \leq \dfrac{s}{t} < 1$, οπότε $\dfrac{x}{t} \in B \Leftrightarrow x \in tB$ και έτσι $p_B(x) \leq t$. Επειδή $p_C \leq p_B$ έπεται ότι $p_C(x) = p_B(x)$. Έτσι έχουμε ότι $p_C = p_B = p_A$.

(ιιι) Υποθέτομε τώρα ότι το A είναι επί πλέον και ισορροπημένο σύνολο. Για κάθε $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$ και $x \in E$ έχουμε,

$$p_A(\lambda x) = \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} = \inf\left\{t > 0 : x \in \frac{t}{|\lambda|}\cdot\left(\frac{|\lambda|}{\lambda}A\right)\right\} = \inf\left\{t > 0 : x \in \frac{t}{|\lambda|}A\right\}$$
$$= \inf\{|\lambda| t' : t' > 0 \text{ και } x \in t'A\} = |\lambda|\, p_A(x).$$

(Το $\mu = \dfrac{|\lambda|}{\lambda}$ έχει απόλυτη τιμή $|\mu| = 1$, επειδή το A είναι ισορροπημένο, έπεται ότι $A = \mu A$.)

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Παρατηρήσεις</u> 1) Σημειώνουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τα συναρτησοειδή Minkowski των συνόλων B και C, εφόσον από την πρόταση 3.3.2 τα σύνολα αυτά (θυμίζουμε ότι το p_A είναι θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές) είναι κυρτά και απορροφούντα.

2) Για τα σύνολα A, B, C του ισχυρισμού (ιι) του θεωρήματος 3.3.7 ενδέχεται να ισχύει $B \underset{\neq}{\subset} A \underset{\neq}{\subset} C$. Πράγματι, έστω $\hat{B}(0,1)$ ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος και S_1 ο κλειστός μοναδιαίος κύκλος του Ευκλείδειου επιπέδου R^2. Θεωρούμε τυχόν υποσύνολο X του S_1 με $\varnothing \neq X \underset{\neq}{\subset} S_1$. Θέτομε $A = \hat{B}(0,1) \setminus X$. Τότε ισχύει ότι $B = \{x : p_A(x) < 1\} = B(0,1)$, $C = \{x : p_A(x) \leq 1\} = \hat{B}(0,1)$ (γιατί;) και συνεπώς $B \underset{\neq}{\subset} A \underset{\neq}{\subset} C$.

3) Αν το p είναι ημινόρμα τότε ισχύει ότι $p = p_B = p_C$ όπου $B = B_p(0,1)$ και $C = \hat{B}_p(0,1)$ (γιατί;). Επομένως οι ημινόρμες ταυτίζονται με τα συναρτησοειδή Minkowski των κυρτών ισορροπημένων και απορροφούντων συνόλων.

<u>Πρόταση</u> 3.3.8 Έστω E τ.δ.χ. και $U \subseteq E$ ανοικτό και κυρτό με $0 \in U$. Τότε ισχύουν :

(ι) Το U είναι απορροφούν και άρα το p_U είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(ιι) $U = \{x \in E : p_U(x) < 1\}$

<u>Απόδειξη</u>. (ι) Όπως έχουμε αποδείξει κάθε περιοχή του 0 σ' ένα τ.δ.χ. E είναι απορροφούσα (πρβλ. θεώρημα 3.1.3). Έτσι το U είναι κυρτό και απορροφούν και άρα μπορεί να ορισθεί το συναρτησοειδές Minkowski του U το οποίο από το θεώρημα 3.3.7 είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(ιι) Από τον ισχυρισμό (ιι) του θεωρήματος 3.3.7 έχουμε ότι $\{x \in E : p_U(x) < 1\} \subseteq U$. Έστω $x \in U$. Από την συνέχεια της απεικόνισης $\varphi : \lambda \in K \to \varphi(x) = \lambda x \in E$ στο $\lambda = 1$ και επειδή $\varphi(1) = x \in U$ με U ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $t \in K,\ |t-1| \leq \delta$ τότε $tx \in U$. Ιδιαίτερα έπεται ότι $(1+\delta)x \in U$. Άρα $x \in \frac{1}{1+\delta}U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{1+\delta} < 1$.

Έτσι αποδείξαμε την ισότητα μεταξύ των δύο συνόλων.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε έναν ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό των τοπικά κυρτών τ.δ.χ. ο οποίος μεταξύ άλλων δικαιολογεί και την ορολογία ' τοπικά κυρτός' χώρος.

<u>Θεώρημα</u> 3.3.9 Έστω (E,T) τ.δ.χ. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο (E,T) είναι τοπικά κυρτός.

(ιι) Ο (E,T) έχει μια βάση περιοχών του $0 \in E$ που αποτελείται από (ανοικτά) <u>κυρτά</u> (και ισορροπημένα) σύνολα.

<u>Απόδειξη</u> (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Έπεται αμέσως από τον ορισμό του τοπικά κυρτού χώρου.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \subseteq E$ ανοικτό και κυρτό με $0 \in A$ τότε υπάρχει ανοικτό κυρτό και ισορροπημένο B με $0 \in B \subseteq A$ (πρβλ. Πρόταση 3.1.2 (χι)).

Έπεται προφανώς ότι ο E έχει μια βάση περιοχών έστω $\mathcal{B}$ αποτελούμενη από ανοικτά κυρτά και ισορροπημένα σύνολα. Από το θεώρημα 3.3.7 κάθε $U \in \mathcal{B}$ ορίζει μια ημινόρμα $p_U : E \to R$.

<u>Ισχυρισμός</u>. Η τοπολογία T_B που καθορίζει η οικογένεια ημινορμών $p = \{ p_U : U \in B\}$ ταυτίζεται με την T .

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού</u> Παρατηρούμε ότι αν $p = p_U$ για κάποιο $U \in B$ τότε από την πρόταση 3.3.8 ισχύει ότι, $B_p(0,1) = \{x \in E : p(x) < 1\} = U$.

Έπεται ότι οι δύο τοπολογίες επάγουν την <u>ίδια</u> βάση περιοχών για το $0 \in E$, από όπου έχουμε το συμπέρασμα.

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τώρα μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας τοπικά κυρτός χώρος <u>μετρικοποιήσιμος</u> .

<u>Θεώρημα</u> 3.3.10 Έστω (E,T) τοπικά κυρτός χώρος (Hausdorff)και p μια οικογένεια ημινορμών που καθορίζει την τοπολογία του E $\big(T = T(p)\big)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο (E,T) είναι μετρικοποιήσιμος.

(ιι) Υπάρχει μια <u>αριθμήσιμη</u> υποοικογένεια $p' \subseteq p$ ώστε η τοπολογία του E να καθορίζεται από την p' $\big(T = T(p')\big)$.

<u>Απόδειξη</u> (ι) $\Rightarrow$ (ιι) . Έστω d μια μετρική επί του E η οποία επάγει την τοπολογία T του E . Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του $0 \in E$ από ανοικτές σφαίρες ως προς την d , π.χ. $\left\{ B_d\left(0,\frac{1}{n}\right) : n \geq 1 \right\}$. Για κάθε $n \in N$ υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο ημινορμών $F_n \subseteq p$ και $\varepsilon_n > 0$ ώστε $B_{F_n}(0,\varepsilon_n) \subseteq B_d\left(0,\frac{1}{n}\right)$, όπου $B_{F_n}(0,\varepsilon_n) = \{x \in E : p(x) < \varepsilon_n, \forall p \in F_n\}$.

Θέτομε $p' = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq p$. Το p' είναι βέβαια ένα αριθμήσιμο σύνολο ημινορμών και ότι η τοπολογία $T(p')$ που καθορίζει η p' επί του E ταυτίζεται με την $T = T(p)$.

(Η ακολουθία $\{B_{F_n}(0,\varepsilon_n) : n \geq 1\}$ είναι και αυτή μια βάση περιοχών του $0 \in E$ ως προς την $T = T(p)$.)

(ιι) $\Rightarrow$ (ι). Έστω $p' = \{ p_n : n \geq 1\} \subseteq p$ μια ακολουθία ημινορμών ώστε $T = T(p')$ σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.5.

Επειδή ο χώρος (E,T) είναι Hausdorff η ακολουθία $p'=\{p_n : n\geq 1\}$ διαχωρίζει τα σημεία του E. Ορίζουμε μια μετρική $d:E\times E\to R$ με τον ακόλουθο τρόπο,

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \quad (1)$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η d είναι πράγματι μια μετρική επί του E η οποία επιπλέον είναι <u>αναλλοίωτη για τις μεταφορές</u>, δηλαδή
$d(x+a,y+a)=d(x,y),\forall x,y,a\in E$.

Έστω T_d η τοπολογία η οποία επάγεται από την μετρική d επί του E. Ας συμβολίσουμε με $B_d(x,\varepsilon)$ την ανοικτή σφαίρα με κέντρο $x\in E$ και ακτίνα $\varepsilon>0$ ως προς την d. Επειδή η d είναι αναλλοίωτη για τις μεταφορές έχομε ότι $B_d(x,\varepsilon)=x+B_d(0,\varepsilon)$. Έπεται ότι για να συγκρίνουμε τις τοπολογίες T και T_d αρκεί να τις συγκρίνουμε « γύρω» από το $0\in E$.

Επειδή κάθε p_n είναι συνεχής (ως προς την T) και επειδή η σειρά (1) συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $E\times E$ η d είναι συνεχής και έτσι κάθε σφαίρα $B_d(0,\varepsilon)$ είναι $T-$ ανοικτό σύνολο. Έπεται ότι $T_d\subseteq T$.

Για να αποδείξουμε ότι $T\subseteq T_d$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $n\geq 1$ και για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $B_d\left(0,\frac{\varepsilon}{2^n(1+\varepsilon)}\right)\subseteq B_{p_n}(0,\varepsilon)$ (2) ισοδύναμα,

$$d(x,0)<\frac{\varepsilon}{2^n(1+\varepsilon)}\Rightarrow p_n(x)<\varepsilon \quad (3).$$

Πράγματι, έστω N φυσικός και $x\in E$ ώστε, $d(x,0)<\dfrac{\varepsilon}{2^N(1+\varepsilon)}$.

Ας υποθέσουμε ότι $p_N(x)\geq\varepsilon$. Τότε [(1)], $\dfrac{p_N(x)}{1+p_N(x)}\geq\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2^N}\dfrac{p_N(x)}{1+p_N(x)}\geq\dfrac{1}{2^N}\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Κατά συνέπεια, $d(x,0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}\geq\frac{1}{2^N}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ όμως η τελευταία ανισότητα αντιφάσκει με την υπόθεσή μας. Έπεται ότι η συνεπαγωγή (3) ισχύει άρα και η (2) ισχύει.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

(1) Η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+x},x\geq 0$ είναι γνήσια αύξουσα, εφόσον,

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2},x\geq 0$.

<u>Παρατήρηση</u> 3.3.11 Έστω E διανυσματικός χώρος και $\mathcal{P} = \{p_n, n \geq 1\}$ μια ακολουθία ημινορμών επί του E η οποία διαχωρίζει τα σημεία του E. Θεωρούμε την τοπικά κυρτή τοπολογία $T = T(p_n)$ η οποία μετρικοποιείται από την μετρική d του προηγούμενου θεωρήματος, δηλαδή $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}, x, y \in E$.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(1) Οι σφαίρες που ορίζει η d δεν είναι κατ' ανάγκη κυρτά σύνολα (βέβαια κάθε σφαίρα $B_d(x,\varepsilon)$ περιέχει μια ανοικτή και κυρτή περιοχή V του x, αφού ο (E,T) είναι τοπικά κυρτός χώρος.). Ένα τέτοιο παράδειγμα περιγράφεται στις ασκήσεις στο τέλος της παραγράφου.

2) Έστω (x_n) ακολουθία στον E. Τότε η (x_n) είναι $d-Cauchy \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε N φυσικό υπάρχει $n_N \equiv n(N,\varepsilon)$ φυσικός τέτοιος ώστε
$n > m \geq n_N \Rightarrow p_N(x_n - x_m) < \varepsilon$.

Απόδειξη '$\Rightarrow$' Έστω ότι η (x_n) είναι $d-Cauchy$. Αν $\varepsilon > 0$ και N φυσικός τότε υπάρχει $n(N,\varepsilon)$ φυσικός τέτοιος ώστε $n > m \geq n(N,\varepsilon)$ τότε $d(x_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2^N(1+\varepsilon)}$

$\Leftrightarrow d(x_n - y_m, 0) < \frac{\varepsilon}{2^N(1+\varepsilon)}$.

Έπεται αμέσως από την (3) του προηγούμενου θεωρήματος
ότι $p_N(x_n - y_m) < \varepsilon, \forall n > m \geq n(N,\varepsilon)$

'' $\Leftarrow$'' Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε n_0 φυσικό αριθμό ώστε, $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε ισχύει, $\bigcap_{k=1}^{n_0} B_{p_k}\left(0, \frac{\varepsilon}{2n_0}\right) \subseteq B_d(0,\varepsilon)$ (4)

Πράγματι, αν $x \in E$ ώστε $p_k(x) < \frac{\varepsilon}{2n_0}, k = 1,2,\ldots,n_0$ τότε,

$$d(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}$$
$$< \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n}\left(\frac{\varepsilon}{2n_0}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2n_0}\left(\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n}\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Θεωρούμε τώρα τους θετικούς ακέραιους $\left\{ n\left(k, \frac{\varepsilon}{2n_0} \right) : k = 1, 2, \ldots, n_0 \right\}$ που προκύπτουν από την υπόθεσή μας και θέτομε $n_1 = \max\left\{ n\left(k, \frac{\varepsilon}{2n_0} \right) : k = 1, 2, \ldots, n_0 \right\}$. Έστω $n > m \geq n_1$, τότε έχουμε ότι, $p_k\left(x_n - x_m\right) < \frac{\varepsilon}{2n_0}$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n_0$. Έτσι από την (4) συμπεραίνουμε ότι, $d\left(x_n, x_m\right) < \varepsilon$ και η $\left(x_n\right)$ είναι ακολουθία Cauchy ως προς την d.

Σημειώνουμε ότι η (4) μας δίνει μια άλλη απόδειξη του γεγονότος ότι $T_d \subseteq T$ (πρβλ την απόδειξη της κατεύθυνσης (ι) $\Rightarrow$ (ιι) του θεωρήματος 3.3.10).

Για να χαρακτηρίσουμε τους χώρους με νόρμα μέσα στην πολύ ευρύτερη κλάση των τοπολογικών διανυσματικών χώρων χρειαζόμαστε μια έννοια φραγμένου συνόλου για τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

Ορισμός 3.3.12 Έστω E τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq E$ λέγεται φραγμένο αν για κάθε U περιοχή του $0 \in E$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\delta A \subseteq U \Leftrightarrow A \subseteq \frac{1}{\delta} U$.

Παρατηρήσεις: 1) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός τ.δ.χ. είναι φραγμένο αφού οι περιοχές του $0 \in E$ είναι απορροφούσες. Γενικότερα όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός τ.δ.χ. είναι φραγμένο.

2) Αν $A \subseteq B \subseteq E$ και το B είναι φραγμένο υποσύνολο του τ.δ.χ. E τότε προφανώς και το A είναι φραγμένο.

3) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα έστω $\|\cdot\|$, τότε οι δύο έννοιες φραγμένου συνόλου- εύκολα διαπιστώνουμε ότι συμπίπτουν. Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι γενικά σε έναν τ.δ.χ. $\left(E, T\right)$ του οποίου η τοπολογία επάγεται από μια μετρική έστω d (μετρικοποιήσιμος τ.δ.χ.) οι δύο έννοιες δεν συμπίπτουν πάντοτε, ακόμα και αν η d είναι αναλλοίωτη για τις μεταφορές. Για παράδειγμα αν ο $\left(E, \|\cdot\|\right)$ είναι (μη τετριμμένος) χώρος με νόρμα και d είναι η μετρική που ορίζει η νόρμα τότε ο E δεν είναι βέβαια φραγμένος ως προς την d και συνεπώς ως προς την έννοια του φραγμένου συνόλου που περιγράφεται στον ορισμό 3.3.12. Από την άλλη μεριά αν $d_1 = \frac{d}{1+d}$ τότε η d_1 είναι μια μετρική ισοδύναμη με την d (αναλλοίωτη για τις μεταφορές) και βέβαια ο E είναι φραγμένος για την d_1 με $d_1\left(x, y\right) \leq 1$ για κάθε $x, y \in E$. Ανάλογες παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε και για την μετρική d που ορίζεται στο θεώρημα 3.3.10

<u>Πρόταση</u> 3.3.13 Έστω V περιοχή του 0 σε έναν τ.δ.χ. E. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

(α) Αν $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ και $\lambda_n \to +\infty$ τότε $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n V$

(b) Αν K συμπαγές υποσύνολο του E τότε το K είναι φραγμένο.

<u>Απόδειξη</u> (α) Έστω $x \in E$ με $x \neq 0$. Επειδή η απεικόνιση $\varphi : \lambda \in K \to \varphi(\lambda) = \lambda x \in E$ είναι συνεχής, το σύνολο $\varphi^{-1}(V) = \{\lambda \in K : \lambda x \in V\}$ είναι περιοχή του $0 \in K$. Έτσι υπάρχει n_0 φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_n} \in \varphi^{-1}(V)$. Επομένως, αν $n \geq n_0$ τότε $\frac{1}{\lambda_n} x \in V$ ή $x \in \lambda_n V$.

Έτσι ο ισχυρισμός (α) έχει αποδειχθεί.

(b) Έστω W ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$. Από τον ισχυρισμό (α) έχομε ότι $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nW = E$. Από την συμπάγεια του K θα υπάρχουν $n_1 < \ldots < n_m \in N$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{\lambda=1}^{m} n_\lambda W$. Επειδή το W είναι ισορροπημένο σύνολο, έπεται ότι $n_\lambda W \subseteq n_m W, \lambda = 1, 2, \ldots, m$. Συνεπώς $K \subseteq n_m W$ και το K είναι φραγμένο.

……………………………………………………………………….

Σε τοπικά κυρτούς χώρους τα φραγμένα σύνολα χαρακτηρίζονται με τον ακόλουθο τρόπο.

<u>Πρόταση</u> 3.3.14 Έστω (E, T) τοπικά κυρτός χώρος, $\mathcal{P}$ μια οικογένεια ημινορμών που καθορίζει την τοπολογία του E $\left(T = T(\mathcal{P})\right)$ και $A \subseteq E$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Το A είναι φραγμένο.

(ιι) Το σύνολο $p(A)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του R για κάθε $p \in \mathcal{P}$.

<u>Απόδειξη</u> (ι) $\Rightarrow$ (ιι). Έστω $p \in \mathcal{P}$. Επειδή η $B_p(0,1) = \{x \in E : p(x) < 1\}$ είναι περιοχή του $0 \in E$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \subseteq \delta \cdot B_p(0,1)$, δηλαδή $0 \leq p(x) < \delta, \forall x \in A$ και άρα το $p(A)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του R.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι). Έστω $B_\Delta(0, \varepsilon)$ μια βασική περιοχή του $0 \in E$, όπου $\varepsilon > 0$ και $\Delta = \{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \mathcal{P}$. Έστω $m_1, \ldots, m_n$ θετικοί πραγματικοί ώστε $p_k(x) < m_k$ για κάθε

$x \in A$ και για κάθε $k = 1, 2, ..., n$. Αν $\delta \geq \max\left\{\frac{m_1}{\varepsilon}, ..., \frac{m_n}{\varepsilon}\right\}$, τότε

$A \subseteq \delta \cdot B_\Delta(0, \varepsilon) = B_\Delta(0, \delta \cdot \varepsilon)$ και έτσι το A είναι φραγμένο στον τ.δ.χ. E.

Θεώρημα 3.3.15 Έστω (E, T) (Hausdorff) τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(ι) Η τοπολογία του E επάγεται από μια νόρμα (ιδιαίτερα, ο (E, T) είναι τοπικά κυρτός.)

(ιι) Υπάρχει μια φραγμένη κυρτή περιοχή του $0 \in E$ (Ισοδύναμα ο E έχει ένα μη κενό ανοικτό κυρτό και φραγμένο σύνολο)

Απόδειξη (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα επί του E ώστε $T = T_{\|\cdot\|}$, τότε βέβαια η ανοικτή σφαίρα $B(0,1) = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ είναι μια ανοικτή κυρτή και φραγμένη περιοχή του $0 \in E$. (πρβλ. και την παρατήρηση (3) μετά τον ορισμό 3.3.12.).

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Έστω U κυρτή φραγμένη περιοχή του $0 \in E$. Από την πρόταση 3.1.2 (χι) υπάρχει μια ανοικτή κυρτή και ισορροπημένη περιοχή V του $0 \in E$ ώστε $V \subseteq U$. Έστω $p = p_V$ το συναρτησοειδές του Minkowski της V.

Ισχυρισμός. Το p_V είναι νόρμα η οποία επάγει την τοπολογία του E.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Το $p = p_V$ είναι βέβαια από το θεώρημα 3.3.7 μια ημινόρμα. Έστω $x \in E$ με $x \neq 0$. Εφόσον ο E είναι Hausdorff υπάρχουν περιοχές W_0 και W_x των 0 και x αντίστοιχα ώστε $W_0 \cap W_x = \varnothing$. Από την υπόθεσή μας η U είναι φραγμένη επομένως υπάρχει $\varepsilon_0 > 0 : \varepsilon_0 V \subseteq \varepsilon_0 U \subseteq W_0$. Όμως ισχύει ότι,
$\varepsilon_0 V = \varepsilon_0 \{y : p(y) < 1\} = \{z : p(z) < \varepsilon_0\}$ (πρβλ. Πρόταση 3.3.8).

Έπεται ότι, $p(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ και η $p = p_V$ είναι μια νόρμα.

Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή $\varepsilon V = \varepsilon\{y : p(y) < 1\} = B_p(0, \varepsilon)$, έπεται ότι κάθε ανοικτή σφαίρα ως προς την νόρμα p είναι ανοικτό σύνολο ως προς την T και άρα $T_p \subseteq T$, όπου T_p είναι η τοπολογία που επάγει η νόρμα p επί του E.

Έστω τώρα W τυχούσα περιοχή του $0 \in E$ ως προς την T. Εφόσον η U είναι φραγμένη υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, $B_p(0, \delta) = \{x : p(x) < \delta\} = \delta V \subseteq \delta U \subseteq W$.

Έπεται αμέσως ότι $T \subseteq T_p$ και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

....

Υπενθυμίζουμε τώρα από την τοπολογία την έννοια του τοπικά συμπαγούς χώρου. Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X λέγεται <u>τοπικά συμπαγής</u>, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια βάση περιοχών του x η οποία αποτελείται από συμπαγή σύνολα. Ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια συμπαγής περιοχή V του x (γιατί;).

<u>Παραδείγματα</u>: 1) Ο Ευκλείδειος χώρος $\left(R^n, \|\cdot\|_2\right)$ είναι τοπικά συμπαγής (και όχι συμπαγής).

2) Κάθε ανοικτό υποσύνολο τοπικά συμπαγούς (ιδιαίτερα συμπαγούς) χώρου είναι τοπικά συμπαγής (γιατί;)

3) Αν X είναι μη κενό σύνολο και d είναι η διακριτή μετρική επί του X, τότε ο (X,d) είναι τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος (γιατί;). Παρατηρούμε ότι αν το X είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο τότε ο (X,d) δεν είναι διαχωρίσιμος.

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει γνωστό αποτέλεσμα για χώρους με νόρμα.

<u>Θεώρημα</u> 3.3.16 Έστω (E,T) τοπικά κυρτός χώρος. Αν ο (E,T) είναι τοπικά συμπαγής τότε η τοπολογία του επάγεται από μια νόρμα και συνεπώς είναι <u>πεπερασμένης</u> διάστασης.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω V περιοχή του $0 \in E$ ώστε η $\overline{V}$ είναι συμπαγές σύνολο. Τότε η $\overline{V}$ και άρα η ίδια η V είναι φραγμένη. Έστω $W \subseteq V$ ανοικτή κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ (πρβλ. θεώρημα 3.3.9).Έπεται από το θεώρημα 3.3.15 ότι το συναρτησοειδές του Minkowski $p = p_W$ του W είναι μια νόρμα η οποία επάγει την τοπολογία του E, ώστε $B_p(0,1) = W$. Έτσι ο E είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος με νόρμα και άρα ο E έχει πεπερασμένη διάσταση.

…………………………………………..

<u>Παρατήρηση</u>. Αποδεικνύεται ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχύει χωρίς την υπόθεση της τοπικής κυρτότητας του E (πρβλ. [R] θεώρημα 1.22).

<u>Παράδειγμα</u> 3.3.17 Έστω $E = K^\Gamma =$ χώρος των συναρτήσεων $f : \Gamma \to R$ με την τοπικά κυρτή τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο T_p (πρβλ. το παράδειγμα 3.2.6 (2)).

(α) Αν το σύνολο Γ είναι άπειρο τότε η T_p δεν επάγεται από μια νόρμα.

(β) Αν το Γ είναι υπεραριθμήσιμο τότε η T_p δεν είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία.

<u>Απόδειξη</u> Υπενθυμίζουμε ότι η τοπολογία T_p του E ορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ όπου $p_\gamma(f) = |f(\gamma)|, \gamma \in \Gamma, f \in E$

(α) Ας υποθέσομε ότι η τοπολογία T_p επάγεται από κάποια νόρμα. Τότε από το θεώρημα 3.3.15 ο E θα είχε μια φραγμένη περιοχή έστω V του $0 \in E$. Έστω $F \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$ ώστε $B_F(0,\varepsilon) \subseteq V$, όπου, $B_F(0,\varepsilon) = \{ f \in E : |f(\gamma)| < \varepsilon, \forall \gamma \in F \}$.

Επειδή η περιοχή $B_F(0,\varepsilon)$ θα είναι και αυτή φραγμένη από την πρόταση 3.3.14 θα υπάρχει για κάθε $\gamma \in \Gamma$, $m_\gamma > 0$ ώστε, $f \in B_F(0,\varepsilon) \Rightarrow |f(\gamma)| \leq m_\gamma$ (1).

Επειδή το Γ είναι άπειρο υπάρχει $\gamma_0 \in \Gamma \setminus F$ (το F είναι πεπερασμένο). Ορίζουμε μια συνάρτηση $f_0 : \Gamma \to K$ με τον ακόλουθο τρόπο, $f_0(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_0\} \\ m_{\gamma_0} + 1, & \gamma = \gamma_0 \end{cases}$.

Τότε $F \subseteq \Gamma \setminus \{\gamma_0\}$, άρα $f_0(\gamma) = 0, \forall \gamma \in F$ και $f_0 \in B_F(0,\varepsilon)$. Όμως $|f_0(\gamma_0)| = m_{\gamma_0} + 1 > m_{\gamma_0}$ και η ανισότητα αυτή αντιφάσκει με την (1). Επομένως η τοπολογία του E δεν επάγεται από κάποια νόρμα.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι το Γ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και ότι η T_p είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία.

Από το θεώρημα 3.3.10 υπάρχει $\Delta \subseteq \Gamma$ το πολύ αριθμήσιμο ώστε η οικογένεια ημινορμών $\{ p_\gamma : \gamma \in \Delta \}$ να καθορίζει την τοπολογία T_p. Επομένως τα σύνολα $\{ B_F(0,\varepsilon) : F \subseteq \Delta \text{ πεπερασμένο και } \varepsilon > 0 \}$ συνιστούν μια βάση περιοχών του $0 \in \mathrm{E}$.

Έστω $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \Delta$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $g_0 : \Gamma \to K$ ώστε $g_0(\gamma) = 0, \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_0\}$ και $g_0(\gamma_0) = 1$. Παρατηρούμε ότι, $g_0 \in B_F(0,\varepsilon)$ για κάθε $F \subseteq \Delta$ πεπερασμένο για κάθε $\varepsilon > 0$, αφού $F \subseteq \Delta \subseteq \Gamma \setminus \{\gamma_0\}$, επομένως $g_0 \in \bigcap \{ B_F(0,\varepsilon) : F \subseteq \Delta \text{ πεπερασμένο, } \varepsilon > 0 \} = \{0\}$ άτοπο εφόσον $g_0(\gamma_0) \neq 0$.

Συμπεραίνουμε ιδιαίτερα από το προηγηθέν παράδειγμα και το θεώρημα 3.3.10 ότι :

1) ο χώρος R^N (και ο C^N) με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο είναι <u>μετρικοποιήσιμος</u> αλλά η τοπολογία του <u>δεν</u> επάγεται από κάποια νόρμα.

2) Οι χώροι $R^{[0,1]}, R^R.C^R, C^C$ κτλ ο καθένας με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο, δεν είναι μετρικοποιήσιμοι.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με ένα χρήσιμο αποτέλεσμα από την Γραμμική Άλγεβρα.

<u>Πρόταση</u> 3.3.18 Έστω E διανυσματικός χώρος, $\Lambda, \Lambda_1, \ldots \Lambda_n$ γραμμικά συναρτησοειδή επί του E και $N = \bigcap_{k=1}^{n} Ker\Lambda_k$. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

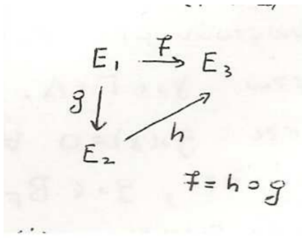
(ι) Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in K$ ώστε $\Lambda = a_1\Lambda_1 + \ldots + a_n\Lambda_n$.

(ιι) $\Lambda(x) = 0, \forall x \in N$, δηλαδή $\bigcap_{k=1}^{n} Ker\Lambda_k \subseteq Ker\Lambda$.

<u>Απόδειξη</u> Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα .

<u>Ισχυρισμός</u>. Έστω E_1, E_2, E_3 διανυσματικοί χώροι και $f : E_1 \to E_3, g : E_1 \to E_2$ γραμμικές απεικονίσεις. Τότε υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $h : E_2 \to E_3$ ώστε $f = hog$ αν και μόνο αν $Kerg \subseteq Kerf$.

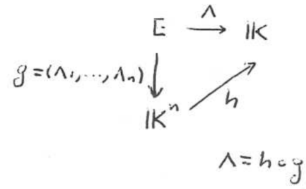
<u>Απόδειξη</u> του ισχυρισμού. Υποθέτομε ότι $Kerg \subseteq Kerf$. Ορίζουμε $h : g(E_1) \to E_3$ ως εξής, $h\big(g(x)\big) = f(x), x \in E_1$. Έστω ότι $g(x_1) = g(x_2)$. Τότε $x_1 - x_2 \in Kerg \subseteq Kerf$, άρα $f(x_1) = f(x_2)$ και έτσι η h είναι καλά ορισμένη.



Επεκτείνουμε την h σε μια γραμμική απεικόνιση επί του E_2 και παρατηρούμε ότι $f = hog$. Η άλλη συνεπαγωγή του ισχυρισμού είναι προφανής.

Αποδεικνύουμε τώρα την συνεπαγωγή (ιι) $\Rightarrow$ (ι).

Εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό για $E_1 = E, E_2 = K^n, E_3 = K, f = \Lambda$ και την $g = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, έτσι βρίσκουμε μια γραμμική απεικόνιση $h : K^n \to K$ ώστε $f(x) = h\big(g(x)\big), x \in E_1 = E$.
Η απεικόνιση h μπορεί βέβαια να γραφεί ως



$h(y) = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$, για κάποιες σταθερές $a_1, \ldots, a_n \in K$ και κάθε $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$. Επομένως
$\Lambda(x) = a_1\Lambda_1(x) + \ldots + a_n\Lambda_n(x)$, για κάθε $x \in E$

Η συνεπαγωγή (ι) $\Rightarrow$ (ιι) είναι προφανής.