<u>Ασκήσεις</u>

1) Έστω Y, Z κλειστοί υπόχωροι του χώρου Banach X. Αν οι Y και Z είναι ισομορφικοί, είναι οι X/Y και X/Z ισομορφικοί;

[<u>Υπόδειξη</u> Όχι. Εξετάστε τους υποχώρους $Y=\{(0,x_2,x_3,...)\}$ και $Z=\{(0,0,x_3,x_4...)\}$ του $X=\ell_2$.]

2) Έστω $\Lambda : c_0 \to R : \Lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n},\ \ x=(x_n)\in c_0$. Αποδείξτε ότι:

(α) Λ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\|\Lambda\|=1$ και $|\Lambda(x)|<1, \forall x\in c_0, \|x\|_\infty \le 1$.

(β) Έστω $H=Ker\Lambda$. Αν $a\in c_0-H$ τότε $d(a,H)<\|a-y\|,\ \forall y\in H$.

[<u>Υπόδειξη</u> Για τον ισχυρισμό (β), θεωρούμε το συναρτησοειδές $\Phi : c_0/H \to R : \Phi(x+H)=\Lambda(x),\ x\in c_0$. Επειδή $\dim c_0/H=1$, αν $a\notin H$ και $\lambda=d(a,H)$ τότε $\left|\Phi\left(\frac{a}{\lambda}+H\right)\right|=\|\Phi\|=1$.].

3) Έστω $X=\ell_2(N\bigcup\{0\})$ ο χώρος Hilbert. Θέτομε $Y=\overline{\langle e_{2n}: n\ge 0\rangle}\subseteq X$, $Z=\overline{\langle e_{2n+1}+(n+1)e_{2n}: n\ge 0\rangle}$ και $E=Y+Z$. Αποδείξτε ότι:

(α) $Y\bigcap Z=\{0\}$ και συνεπώς $E=Y\oplus Z$ (αλγεβρικό ευθύ άθροισμα).

(β) Ο E είναι πυκνός υπόχωρος του X και $E\ne X$.

(γ) Η προβολή $P: E\to Y: P(y+z)=y$ δεν είναι φραγμένη.

[<u>Υπόδειξη</u> Το σύνολο $\left\{b_n=e_{2n}+\frac{1}{n+1}e_{2n+1}: n\ge 0\right\}$ είναι ορθογώνιο και άρα το $\left\{\frac{b_n}{\|b_n\|_2}: n\ge 1\right\}$ ορθοκανονικό. Επίσης το σημείο $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-e_{2n})\in X-E$.]

4) Έστω $T: X\to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής μεταξύ των χώρων με νόρμα X, Y ο οποίος είναι $1-1$. Αποδείξτε ότι ο T είναι ισομετρία επι του Y αν και μόνο αν $T\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right)=\hat{\mathrm{B}}_Y$, αν και μόνο αν $T(S_X)=S_Y$,αν και μόνο αν $T(\mathrm{B}_X)=\mathrm{B}_Y$.

5) Έστω X χώρος με νόρμα και $P: X\to X$ φραγμένη προβολή, τότε $\|P\|\ge 1$.

6) Έστω X χώρος με νόρμα, αποδείξτε ότι ο X^* είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X^{***}.

[Υπόδειξη Ορίζουμε $P: X^{***} \to X^* : f \to P(f) = f\big|_X$. Η προβολή αυτή ονομάζεται και προβολή του Dixmier].

7) Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X.

Αποδείξτε ότι:

α) Αν ο Y είναι κλειστός στον X και έχει πεπερασμένη συνδιάσταση στον X τότε είναι συμπληρωματικός στον X.

(β) Αν ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση τότε είναι συμπληρωματικός στον X.

[Υπόδειξη. (α) Αν Z είναι ένα αλγεβρικό συμπλήρωμα του Y ως προς τον X τότε Z είναι πεπερασμένης διάστασης και άρα κλειστός υπόχωρος του X. Έστω $P: X \to Z \subseteq X$ η προβολή του X επί του Z. Παρατηρούμε ότι $P = j \circ \pi$, όπου $\pi : X \to X / Y$ η κανονική απεικόνιση και $j : X / Y \to Z : j(x+Y) = P(x)$. Η απεικόνιση j είναι ένας αλγεβρικός ισομορφισμός ο οποίος είναι (άρα) και ομοιομορφισμός. Για την απόδειξη του ισχυρισμού (β), χρησιμοποιείστε τον (α)].

8) Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί (μη τετριμμένοι) υπόχωροι του X ώστε $Y \bigcap Z = \{0\}$. Θέτομε $d = d(S_Y, S_Z)$.

Αποδείξτε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος $E = Y + Z$ του X είναι κλειστός στον X αν και μόνο αν $d > 0$.

[Υπόδειξη Έστω ότι ο E είναι κλειστός στον X. Τότε ο Y είναι συμπληρωματικός στον χώρο Banach E και συνεπώς υπάρχει μια φραγμένη προβολή, $P: E \to Y \subseteq E$. Αν $y \in S_Y$ και $z \in S_Z$, τότε $1 = \|y\| = \|P(y-z)\| \le \|P\| \cdot \|y - z\| \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\|P\|} \le d$.

Υποθέτομε τώρα ότι ο E δεν είναι κλειστός στον X. Έπεται τότε ότι δεν υπάρχει $c > 0$ ώστε $\|y\| \le c\|y - z\|, \forall y \in Y, \forall z \in Z$. (Πράγματι, αν υπήρχε τέτοια σταθερά τότε η προβολή $P: E \to Y$ θα ήταν φραγμένη, ισοδύναμα η απεικόνιση $\Phi : E \to Y \times Z$, $\Phi(y+z) = (y,z)$ θα ήταν ομοιομορφισμός και κατά συνέπεια ο E θα ήταν χώρος Banach, αφού ο $Y \times Z$ είναι χώρος Banach, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεσή μας.)

Ισοδύναμα, δεν υπάρχει $c > 0$ ώστε $1 = \|y\| \le c\|y - z\|, \forall z \in Z, \forall y \in Y$ με $\|y\| = 1$.

Συνεπώς, $\forall n \geq 1\ \exists y_n \in Y$ με $\|y_n\| = 1$ και $z_n \in Z$ ώστε $\|y_n + z_n\| \leq \frac{1}{n}$. Έπεται ότι, $\|z_n\| \to 1$ και ακόμη ότι $\left\| y_n + \frac{z_n}{\|z_n\|} \right\| \to 0$.]

9) Έστω X χώρος με νόρμα και Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\forall x \in X - Y \quad \exists y \in Y: \ \|x - y\| = d(x, Y)$.

(β) Αν $\pi : X \to X / Y$ είναι η κανονική απεικόνιση τότε $\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right) = \hat{\mathrm{B}}_{X/Y}$.

10) Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X ώστε $X = Y \oplus Z$

(τοπολογικό ευθύ άθροισμα).

(α) Αποδείξτε ότι, $X / Y \cong Z$ και $X / Z \cong Y$ (τοπολογικοί ισομορφισμοί) και

(β) Ισχύει το αποτέλεσμα χωρίς την υπόθεση ότι ο X είναι χώρος Banach;

[<u>Υπόδειξη</u> για το (β) Ναι , εφόσον η απεικόνιση $j : X / Y \to Z : j(x + Y) = P_Z(x)$ είναι ομοιομορφισμός].