ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

# Κυρτή Ανάλυση

**Ενότητα**: Εισαγωγή - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

**Χρηματοδότηση**

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

# Περιεχόμενα ενότητας

1.6 Ασκήσεις . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

## 1.6 Ασκήσεις

**1.** Δίνονται δύο ορθογώνια $I_1 = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ και $I_2 = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία δεν επικαλύπτονται (έχουν ξένα εσωτερικά). Δείξτε ότι υπάρχουν $j \in \{1, \dots, n\}$ και $t \in \mathbb{R}$ ώστε το υπερεπίπεδο $\{x : x_j = t\}$ να διαχωρίζει τα $I_1$ και $I_2$ (δηλαδή, είτε $I_1 \subseteq \{x : x_j \leq t\}$ και $I_2 \subseteq \{x : x_j \geq t\}$ ή $I_1 \subseteq \{x : x_j \geq t\}$ και $I_2 \subseteq \{x : x_j \leq t\}$).

**2.** Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, συμμετρικό ως προς το $0$. Θεωρούμε $\theta \in S^{n-1}$ και τη συνάρτηση

$$f_\theta(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|.$$

Δείξτε ότι

$$f_\theta(0) \geq f_\theta(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

**3.** (*το Λήμμα του Borell*) Έστω $B$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $A$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ώστε το $A \cap B$ να έχει όγκο, ορίζουμε

$$\mu_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

(α) Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το $0$. Δείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski δείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leq a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{(t+1)/2}.$$

*Συμπέρασμα:* Αν $\mu_B(M) = a > 1/2$, δηλαδή αν το $M$ τέμνει «παραπάνω από το μισό» $B$, τότε το ποσοστό του $B$ που μένει έξω από το $tM$ φθίνει εκθετικά στο $0$ καθώς το $t \to \infty$ (για παράδειγμα, αν $\mu_B(M) = 2/3$ τότε $1 - \mu_B(tM) \leq 2^{-t/2}$ για κάθε $t > 1$).

**4.** Αυτή η άσκηση δείχνει ότι (για μεγάλες διαστάσεις) δύο υποσύνολα της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας μπορούν να έχουν «σχετικά μεγάλη» απόσταση μόνο αν κάποιο από τα δύο είναι «πολύ μικρό».

Έστω $A$ και $C$ δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα της $B_2^n$. Υποθέτουμε ότι

$$d(A,C) = \min\{\|a-c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}}B_2^n.$$

(*Υπόδειξη:* Θεωρήστε $a \in A$ και $c \in C$, και χρησιμοποιήστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.)

(β) Δείξτε ότι

$$\min\{|A|, |C|\} \leq \exp(-\rho^2 n/8)|B_2^n|.$$

**5.** Έστω $K$ και $T$ δύο συμμετρικά (ως προς το $0$) κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

(α) Δείξτε ότι $\frac{1}{2}[K \cap (x+T)] + \frac{1}{2}[K \cap (-x+T)] \subseteq K \cap T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

(β) Δείξτε ότι $|K \cap (x+T)| \leq |K \cap T|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

*Ορισμοί για τις ασκήσεις 6–9.* Έστω $K$ και $T$ κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ελάχιστο πλήθος μεταφορών $x_i + T$ του $T$ που η ένωσή τους καλύπτει το $K$. Μπορούμε να ζητήσουμε τα «κέντρα» $x_i$ να ανήκουν στο $K$ ή να επιλέγονται ελεύθερα στο χώρο. Έτσι, ορίζουμε

$$\overline{N}(K,T) = \min\left\{ N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1,\ldots,x_N \in \mathbb{R}^n : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + T)\right\}$$

και

$$N(K,T) = \min\left\{ N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1,\ldots,x_N \in K : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + T)\right\}.$$

Λόγω συμπάγειας, οι *αριθμοί κάλυψης* $\overline{N}(K,T)$ και $N(K,T)$ ορίζονται καλά.

**6.** Δείξτε ότι αν $K$, $T$ και $M$ είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\overline{N}(K,M) \leq \overline{N}(K,T) \cdot \overline{N}(T,M).$$

**7.** Από τους ορισμούς βλέπουμε εύκολα ότι

$$\overline{N}(K,T) \leq N(K,T).$$

Δείξτε ότι: αν τα $K$ και $T$ είναι συμμετρικά ως προς το $0$, τότε

$$N(K,2T) \leq \overline{N}(K,T).$$

**8.** Έστω $K$ ένα συμμετρικό (ως προς το $0$) κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε τον αριθμό κάλυψης $N(K,\rho B_2^n)$ είναι ο εξής. Θεωρούμε ένα υποσύνολο $S = \{x_1,\ldots,x_N\}$ του $K$ με την εξής ιδιότητα:

$(*)$ αν $i \neq j$ τότε $\|x_i - x_j\|_2 \geq \rho$.

(α) Δείξτε ότι

$$N \leq \frac{\left|K + \frac{\rho}{2}B_2^n\right|}{\left|\frac{\rho}{2}B_2^n\right|}.$$

(β) Δείξτε ότι: για κάθε $\rho > 0$ υπάρχει μεγιστικό $S \subset K$ που ικανοποιεί την $(*)$. Με τον όρο «μεγιστικό» εννοούμε ότι το $S$ ικανοποιεί την $(*)$ αλλά αν προσθέσουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο $z \in K \setminus S$ στο $S$, τότε το $S \cup \{z\}$ δεν ικανοποιεί την $(*)$. Λέμε ότι το $S$ είναι ένα *$\rho$-δίκτυο*.

(γ) Δείξτε ότι αν $S = \{x_1,\ldots,x_N\}$ είναι ένα $\rho$-δίκτυο στο $K$, τότε

$$N(K,\rho B_2^n) \leq N.$$

**9.** Δείξτε ότι: για κάθε $\rho \in (0,1)$,

$$N(B_2^n,\rho B_2^n) \leq \left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^n.$$

**10*.** Έστω $S = \{x_1,\ldots,x_N\} \subset S^{n-1}$ με την εξής ιδιότητα: αν $i \neq j$ τότε $\|x_i - x_j\|_2 \geq \sqrt{2}$. Δείξτε ότι $N \leq 2n$.

**11.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|_2^2/2}$$

και για κάθε μη κενό Borel σύνολο $A$ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\gamma_n(A) := \int_A \gamma_n(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx.$$

Το $\gamma_n$ είναι το *μέτρο του Gauss* στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa-Leindler δείξτε ότι: αν $A, B$ είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq (\gamma_n(A))^{\lambda} (\gamma_n(B))^{1-\lambda}.$$

**12.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-\|x\|_2^2/2}\gamma_n(A) \leq \gamma_n(A + x) \leq \gamma_n(A).$$

**13.** Έστω $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες: (α) $g(1) = 1$, (β) $g(x+1) = xg(x)$ για κάθε $x > 0$, (γ) η $logg$ είναι κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι $g \equiv \Gamma$.

*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιώντας μόνο τις (α), (β) και (γ) αποδείξτε ότι

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

**14.** Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ισότητα

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x).$$

*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.