ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Συνδυαστικά θεωρήματα για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

2.7 Ασκήσεις

1. Έστω A ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(A)$ του A είναι ανοικτό σύνολο.

2. (α) Έστω S μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι τα S και $\mathrm{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.

(β) Έστω S,T μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{conv}(S+T) = \mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T).$$

(γ) Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{conv}(S))$. Ισχύει πάντα ισότητα;

3. Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ δύο σημεία που **δεν** ανήκουν στην κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ του S. Δείξτε ότι αν $x \in \mathrm{conv}(S \cup \{y\})$ και $y \in \mathrm{conv}(S \cup \{x\})$ τότε $x = y$.

4. Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα $I_1, \dots, I_m$ στον $\mathbb{R}^2$ τα οποία περιέχονται στις διακεκριμένες παράλληλες ευθείες $\ell_1, \dots, \ell_m$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει ευθεία που τέμνει τα I_{i_1}, I_{i_2} και I_{i_3}. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία που τέμνει όλα τα διαστήματα $I_1, \dots, I_m$.

5. Δίνονται κυρτά σύνολα $A_1, \dots, A_m$ στον $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i, j \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x–άξονα που τέμνει τα A_i και A_j. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x–άξονα που τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \dots, A_m$.

6. Έστω $m \geq n+1$, $d > 0$ και $C_1, \dots, C_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: αν $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n+1} \leq m$ τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $d(y, C_{i_j}) \leq d$ για κάθε $j = 1, \dots, n+1$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $d(x, C_i) \leq d$ για κάθε $i = 1, \dots, m$.

7. Δίνονται $\theta_1, \dots, \theta_k \in S^{n-1}$ και $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το κυρτό πολύεδρο

$$P = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_i \rangle \leq t_i\}$$

είναι μη κενό και φραγμένο. Δείξτε ότι: αν το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = t\}$ (όπου $\theta \in S^{n-1}$ και $t \in \mathbb{R}$) ικανοποιεί την $P \cap H = \emptyset$, τότε υπάρχουν $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq k$ ώστε το $P' = \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_{i_j} \rangle \leq t_{i_j}\}$ να ικανοποιεί τις $P_1 \supseteq P$ και $P' \cap H = \emptyset$.

8. Έστω $A_1, \dots, A_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k \leq n+1$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$, το σύνολο $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ είναι μη κενό.

Δείξτε ότι: αν F είναι ένας $(n-k+1)$-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε η μεταφορά $F + u$ του F να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \dots, A_m$.

9. Έστω $A_1, \dots, A_m$ και C κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $i = 1, \dots, m$, το σύνολο $B_i = \{u \in \mathbb{R}^n : A_i \cap (C+u) \neq \emptyset\}$ είναι κυρτό.

(β) Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C + u$ να τέμνει τα $A_{i_1}, \dots, A_{i_{n+1}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C + u$ να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \dots, A_m$.

10. Έστω $m \geq n+1$ και $K, C_1, \ldots, C_m$ κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n+1} \leq m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_{n+1}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_1 \cap \cdots \cap C_m$.

11. Δίνονται n σημεία $x_1, \ldots, x_n$ στο επίπεδο. Δείξτε ότι υπάρχει ζεύγος κάθετων ευθειών $\ell_1 \perp \ell_2$ ώστε καθένα από τα τέσσερα κλειστά τεταρτημόρια στα οποία χωρίζουν το επίπεδο να περιέχει τουλάχιστον $[n/4]$ από τα σημεία x_i.

12. Έστω $T(n,r)$ ο μικρότερος φυσικός m με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $A \subset \mathbb{R}^n$ και $|A| = m$, τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1, \ldots, A_r \subset A$ ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{conv}(A_i) \neq \emptyset.$$

Δείξτε ότι

$$T(n, r_1 r_2) \leq T(n, r_1) T(n, r_2)$$

για κάθε $r_1, r_2 \geq 2$.

13. Σκοπός μας σε αυτή την άσκηση είναι να δείξουμε το εξής: αν K είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$-\frac{1}{n}K + y \subseteq K.$$

(α) Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που $K = \mathrm{conv}(\{u_1, \ldots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \ldots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ με $u_1 + \cdots + u_{n+1} = 0$. Με αυτές τις υποθέσεις δείξτε ότι

$$-\frac{1}{n}K \subseteq K.$$

(β) Εξετάστε τώρα την περίπτωση που $K = \mathrm{conv}(\{u_1, \ldots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \ldots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$. Αν

$$y = \frac{u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n},$$

δείξτε ότι

$$-\frac{1}{n}K + y \subseteq K.$$

(γ) Θεωρήστε τώρα τη γενική περίπτωση: K είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in K$ θεωρήστε το σύνολο

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{n}x + y \in K \right\}$$

και δείξτε ότι η οικογένεια $\{A_x : x \in K\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly.

14*. Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η *διάμετρος* του K ορίζεται από την

$$\mathrm{diam}(K) = \max\{\|x - y\|_2 : x, y \in K\}.$$

Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{diam}(K) \leq 2$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το K να περιέχεται στην κλειστή μπάλα $B(u, r_n)$ με κέντρο u και ακτίνα

$$r_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως *θεώρημα του Jung*.

15*. Δίνονται μη κενές οικογένειες $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n+1}$ συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε επιλογή $C_1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, C_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}$ ισχύει $C_1 \cap \cdots \cap C_{n+1} \neq \emptyset$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε όλα τα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{C}_i$ να έχουν κάποιο κοινό σημείο.

16* Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ του S έχει μη κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι: αν $x \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(S))$ τότε υπάρχουν $v_1, \ldots, v_{2n} \in S$ ώστε $x \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{2n}\}))$.