ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Υπερεπίπεδα στήριξης και διαχωριστικά θεωρήματα - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

4.6 Ασκήσεις

1. Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\})$ γράφεται μονοσήμαντα σαν κυρτός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Δείξτε ότι τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα.

2. Έστω C μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι:

1. $\mathrm{aff}(C) = \mathrm{aff}(\overline{C}) = \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(C))$.
2. $\mathrm{ri}(C) = \mathrm{ri}(\overline{C}) = \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(C))$.
3. $\mathrm{rb}(C) = \mathrm{rb}(\overline{C}) = \mathrm{rb}(\mathrm{ri}(C))$.

3. Έστω C_1, C_2 μη κενά, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{ri}(C_1 + C_2) = \mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2).$$

4. Έστω C_1, C_2 κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{ri}(C_1 \cap C_2) = \mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2).$$

Ισχύει το ίδιο για τυχόντα μη κενά κυρτά $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$;

5. Έστω $\{C_i : i \in I\}$ οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με $\bigcap_{i \in I} \mathrm{ri}(C_i) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι

$$\overline{\bigcap_{i \in I} C_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}.$$

6. Έστω $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$ ένα n–simplex στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $y \in \mathrm{int}(S)$. Δείξτε ότι τα

$$S_i = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n\}), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

είναι n–simplices, ανά δύο έχουν ξένα εσωτερικά, και

$$S = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n.$$

7. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\overline{\mathrm{conv}(A)} = \bigcap \{B \subseteq \mathbb{R}^n : B \supseteq A,\ B \text{ κλειστό και κυρτό}\}.$$

8. Δώστε παράδειγμα κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$ του οποίου η κυρτή θήκη δεν είναι κλειστό σύνολο. Μπορείτε να βρείτε αντίστοιχο παράδειγμα στο $\mathbb{R}$;

9. Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$, τότε $x - p_C(x) = y - P_C(y)$.

Αν $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, τι συμπεραίνετε για το C;

10*. Έστω A μη κενό, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικό $p_A(x) \in A$ ώστε $\|x - p_A(x)\|_2 = d(x, A)$. Δείξτε ότι το A είναι κυρτό.

11. Έστω K ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει οικογένεια $\{B(x_i, r_i) : i \in I\}$ από κλειστές μπάλες στον $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$K = \bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i).$$

12. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το *κέντρο βάρους* του K είναι το σημείο $y = (y_1, \ldots, y_n)$ με συντεταγμένες

$$y_i = \frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_i \rangle \, dx, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Δείξτε ότι $y \in K$.

13. (α) Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που το συμπλήρωμά τους είναι επίσης κυρτό.

(β) Περιγράψτε όλα τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τα οποία δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης.

14. (α) Υπάρχει παράδειγμα ξένων μη κενών, κλειστών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ τα οποία δεν διαχωρίζονται γνήσια;

(β) Υπάρχει παράδειγμα ξένων μη κενών, κλειστών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ τα οποία να διαχωρίζονται γνήσια αλλά να μην διαχωρίζονται αυστηρά;

15. Έστω C μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το C είναι κλειστό αν και μόνο αν το $C \cap \ell$ είναι κλειστό σύνολο για κάθε ευθεία ℓ στον $\mathbb{R}^n$.

16. (α) Έστω $T = \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_m\})$. Δείξτε ότι

$$T^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_j \rangle \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m\}.$$

(β) Έστω $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ και

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_j \rangle \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m\}.$$

Δείξτε ότι $P^\circ = \mathrm{conv}(\{0, v_1, \ldots, v_m\})$.

17. Έστω A και B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τα οποία περιέχουν το 0. Δείξτε ότι

$$(A \cap B)^\circ = \overline{\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}.$$