ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Ακραία σημεία - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

6.4 Ασκήσεις

1. Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν F είναι έδρα του C και $x \in \mathrm{ext}(F)$ τότε $x \in \mathrm{ext}(C)$.

2. Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το σύνολο των ακραίων σημείων του C είναι κλειστό.

3. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{conv}(A)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \notin \mathrm{conv}(A \setminus \{x\})$.

4. Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\mathrm{ext}(C) \neq \emptyset$ αν και μόνο αν το C δεν περιέχει καμία ευθεία.

5. Δείξτε ότι κάθε πολύεδρο έχει πεπερασμένες το πλήθος έδρες.

6. Δείξτε ότι κάθε έδρα ενός πολυέδρου είναι πολύεδρο.

7. Δείξτε ότι κάθε πολύτοπο έχει πεπερασμένες το πλήθος έδρες.

8*. Δείξτε ότι κάθε μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που έχει πεπερασμένες το πλήθος έδρες είναι πολύεδρο.

9. Πολύτοπο του Birkhoff – πολύτοπα μεταθέσεων. Το DS_n περιέχεται στον αφινικό υπόχωρο

$$L = \left\{ X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2} : (\forall i \leq n) \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ (\forall j \leq n) \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \right\}$$

του $\mathbb{R}^{n^2}$, ο οποίος έχει διάσταση $(n-1)^2$.

(α) Δείξτε ότι $\mathrm{aff}(DS_n) = (n-1)^2$, οπότε το DS_n έχει εσωτερικό σημείο στον L.

(β) Βρείτε την ακτίνα της μεγαλύτερης μπάλας του L που περιέχεται στο DS_n και έχει κέντρο το σημείο $X = (x_{ij})$ με $x_{ij} = \frac{1}{n}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

(*Υπόδειξη*: Αυτή η μπάλα θα ακουμπάει το σύνορο του DS_n σε κάποιον $A = (a_{ij})$ που έχει τουλάχιστον μία μηδενική συντεταγμένη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_{11} = 0$. Δείξτε ότι:

1. $\|X - A\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} - \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 - 1.$
2. $\sum_{j=2}^{n} a_{1j}^2 \geq \frac{1}{n-1}.$
3. Για κάθε $i = 2, \ldots, n$,
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq \frac{1}{n-1} + \frac{n}{n-1} a_{i1}^2 - \frac{2}{n-1} a_{i1}.$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δείξτε ότι

$$\|X - A\|_2^2 \geq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Βρείτε $A \in DS_n$ με $a_{11} = 0$ για τον οποίο ισχύει ισότητα και συμπεράνατε ότι η ακτίνα που ζητάμε είναι ίση με $\frac{1}{n-1}$.)

(γ) Δείξτε ότι το σύνολο $F = \{X = (x_{ij}) \in DS_n \,:\, x_{11} = 0\}$ είναι έδρα του DS_n με διάσταση $(n-1)^2 - 1$.

(δ) Δείξτε ότι το σύνολο $G = \{X = (x_{ij}) \in DS_n \,:\, x_{11} = 1\}$ είναι έδρα του DS_n με διάσταση $(n-2)^2$.

(ε) Έστω $\alpha = (1, 2, 3)$. Σχεδιάστε το πολύτοπο $P(\alpha)$ των μεταθέσεων του α.

(στ) Έστω $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Δείξτε ότι το πολύτοπο $P(\alpha)$ έχει $n!$ ακραία σημεία αν και μόνο αν οι συντεταγμένες α_i του α είναι διαφορετικές ανά δύο.

10. Ένας χαρακτηρισμός των διπλά στοχαστικών πινάκων. Έστω $w = (w_1, \dots, w_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ δύο n-άδες πραγματικών αριθμών με

$$w_1 \geq \cdots \geq w_n \quad \text{και} \quad y_1 \geq \cdots \geq y_n.$$

Λέμε ότι το διάνυσμα y *κυριαρχείται* από το διάνυσμα w και γράφουμε $y \prec w$ αν

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \leq \sum_{i=1}^{k} w_i \quad \text{για κάθε } k = 1, \dots, n-1$$

και

$$y_1 + \cdots + y_n = w_1 + \cdots + w_n.$$

(α) Δείξτε ότι $X = (x_{ij}) \in DS_n$ αν και μόνο αν $X(w) \prec w$ για κάθε $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$.

(*Υπόδειξη:* Θα χρειαστείτε την παρατήρηση ότι το γινόμενο δύο διπλά στοχαστικών πινάκων είναι διπλά στοχαστικός πίνακας. Ειδικότερα, αν ο X είναι διπλά στοχαστικός και αν $P = X^{\sigma}, Q = X^{\tau}$ είναι δύο πίνακες μετάθεσης, τότε ο PXQ είναι διπλά στοχαστικός.)

(β)* Έστω $w = (w_1, \dots, w_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ δύο n-άδες πραγματικών αριθμών με $w_1 \geq \cdots \geq w_n$ και $y_1 \geq \cdots \geq y_n$. Δείξτε ότι $y \prec w$ αν και μόνο αν υπάρχει $X \in DS_n$ ώστε $y = X(w)$.

11. Θεώρημα Schur-Horn. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και $\ell = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

(α) Δείξτε το εξής θεώρημα του Schur: Έστω $A = (\alpha_{ij})$ ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας που έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Τότε, το $\alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn})$ ανήκει στο πολύτοπο $P(\ell)$ των μεταθέσεων του ℓ.

(*Υπόδειξη.* Ο A γράφεται στη μορφή $A = UDU^t$, όπου D ο διαγώνιος πίνακας $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και $U = (u_{ij})$ ένας ορθογώνιος πίνακας. Παρατηρήστε ότι ο πίνακας $X = (u_{ij}^2)$ είναι διπλα στοχαστικός και χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση $A = ADU^t$ δείξτε ότι $\alpha = X(\ell)$ για κάποιον $X \in DS_n$.)

(β)** Δείξτε ότι ισχύει το αντίστροφο (θεώρημα του Horn): Έστω $\alpha \in P(\ell)$. Τότε, υπάρχει συμμετρικός $n \times n$ πίνακας $A = (\alpha_{ij})$ που έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ και διαγώνιο $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}) = \alpha$.