ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

΄Αδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

7.8 Ασκήσεις 4

7.8 Ασκήσεις

1. Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\|x\|_q \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|x\|_q.$$

2. Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι

$$d(\ell_2^n, \ell_q^n) \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

3. Δείξτε ότι: αν $y_1, \dots, y_m \in \ell_2^n$ τότε

$$\sum_{j=1}^m \|y_j\|_2^2 = \mathrm{Ave}_{\varepsilon=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j y_j\right\|_2^2,$$

όπου με Ave συμβολίζουμε το μέσο όρο ως προς όλες τις δυνατές επιλογές προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$.

4. Έστω $2 \leq q \leq \infty$ και έστω $T : \ell_q^n \to \ell_2^n$ ισομορφισμός, με $\|T : \ell_q^n \to \ell_2^n\| = 1$.

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^n \|Te_j\|_2^2 \leq n^{2/q},$$

και συμπεράνατε ότι $\|Te_j\|_2 \leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$ για κάποιον $j \leq n$.

(β) Δείξτε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_q^n\| \geq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

5. Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Δείξτε ότι

$$d(\ell_2^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

6. Χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d και την προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι: αν $2 \leq p < q \leq +\infty$ τότε

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \geq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

7. Έστω $1 \leq p < q \leq 2$. Χρησιμοποιώντας την $d(X^*, Y^*) = d(X, Y)$ δείξτε ότι

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

8. Οι πίνακες Walsh είναι ορθογώνιοι $2^k \times 2^k$ πίνακες, που ορίζονται επαγωγικά ως εξής: Θέτουμε $W_0 = [1]$, και

$$W_k = \begin{bmatrix} W_{k-1} & W_{k-1} \\ W_{k-1} & -W_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad k \geq 1.$$

Δείξτε ότι ο $\frac{1}{2^{k/2}}W_k$ είναι ορθογώνιος πίνακας με την ιδιότητα: όλες του οι συντεταγμένες έχουν απόλυτη τιμή $\frac{1}{2^{k/2}}$.

9. Έστω $n = 2^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ο τελεστής που αντιστοιχεί στον $\frac{1}{2^{k/2}}W_k$.

(α) Παρατηρήστε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| = 1$$

και συμπεράνατε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_\infty^n \to \ell_1^n\| \leq n.$$

(β) Παρατηρήστε ότι $\|Te_j\|_\infty = 1/\sqrt{n}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και συμπεράνατε ότι

$$\|T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(γ) Δείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \leq \sqrt{n}$.

10*. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \leq c\sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

11. Έστω $T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n$ ισομορφισμός, ο οποίος ικανοποιεί την

$$\frac{1}{d}B_\infty^n \subseteq T(B_1^n) \subseteq B_\infty^n,$$

όπου B_∞^n, B_1^n οι μοναδιαίες μπάλες των ℓ_∞^n, ℓ_1^n αντίστοιχα.

(α) Αν $x_j = T(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$|T(B_1^n)| = \frac{2^n}{n!}|\det X|,$$

όπου X ο πίνακας με στήλες τα $x_1, \ldots, x_n$. (*Υπόδειξη:* Αρκεί να δείξετε ότι $|B_1^n| = 2^n/n!$.)

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $x_1, \ldots, x_n \in B_\infty^n$ και την ανισότητα του Hadamard, δείξτε ότι $|\det X| \leq n^{n/2}$.

(γ) Δείξτε ότι $d \geq c_1\sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από τον T και από το n.

(δ) Δείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \geq c_1\sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ η σταθερά στο (γ).

12*. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει την B_2^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ και σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n ώστε

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

13. Δίνονται $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) ώστε

$$I = \sum_{j=1}^m x_j \otimes x_j.$$

(α) Δείξτε ότι $\sum_{j=1}^m \|x_j\|_2^2 = n$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1,\ldots,a_m$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} a_j x_j\right\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2\right)^{1/2}.$$

14*. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Δείξτε ότι υπάρχει παραλληλεπίπεδο P ώστε $K \subseteq P$ και

$$|P| \leq 2^n \frac{n^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

15. Έστω $v_1,\ldots,v_m \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό πολύεδρο

$$K = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle y, v_j\rangle| \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1,\ldots,m\}$$

ικανοποιεί την $B_2^n \subseteq K \subseteq \alpha B_2^n$ για κάποιον $\alpha > 1$. Δείξτε ότι $m \geq \exp(n/(2\alpha^2))$.

16. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $N \leq \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n$ και $T : X \to \ell_\infty^n$ με την ιδιότητα

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leq \|T(x)\|_{\ell_\infty^n} \leq (1+\varepsilon)\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.