ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Κυρτές συναρτήσεις - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

5.4 Ασκήσεις

1. Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ άνω φραγμένη κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

2. Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση και έστω ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει αφινική συνάρτηση $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Έστω V μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f:V \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν C είναι μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του V τότε η f είναι Lipschitz συνεχής στο C.

4. Έστω C μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f:C \to \mathbb{R}$.

(α) Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq 0$$

για κάθε $x, y \in C$.

(β) Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν για κάθε $x \in C$ και για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) u_i u_j \geq 0.$$

5. Έστω C κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \mathrm{dist}(x, C)$.

(α) Έστω $x \notin C$. Δείξτε ότι

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_C(x)}{\|x - p_C(x)\|_2}.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n \setminus C$.

6. Έστω A, B μη κενά, συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αν $C = \mathrm{conv}(A \cup B)$ δείξτε ότι

$$h_C(x) = \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

7. Έστω A, B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Αν $C = A \cap B$ δείξτε ότι

$$g_C(x) = \max\{g_A(x), g_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

8. Έστω $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή, θετικά ομογενής συνάρτηση. Δείξτε ότι:

1. $h'(u;u) = h(u)$ και $h'(u;-u) = -h(u)$,
2. $h'(u;y) \leq h(y)$,

όπου $h'(x;u)$ είναι η παράγωγος της f στο σημείο x στην κατεύθυνση του u.

9. Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έστω $u \neq 0$. Ορίζουμε

$$L = \{x \in C : h_C(u) = \langle x, u\rangle\}.$$

Δείξτε ότι:

1. $h'_C(u;y) = h_L(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.
2. Η h_C είναι διαφορίσιμη στο u αν και μόνο αν το L είναι μονοσύνολο.

10. Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η h_C είναι γραμμική αν και μόνο αν το C είναι μονοσύνολο.

11. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Το *υποδιαφορικό* της f στο x είναι το σύνολο

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle \ \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}^n\}.$$

(α) Δείξτε ότι το $\partial f(x)$ είναι μη κενό, συμπαγές και κυρτό.

(β) Δείξτε ότι

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u\rangle \leq f'(x;u) \text{ για κάθε } u \neq 0\},$$

όπου $f'(x;u)$ είναι η παράγωγος της f στο σημείο x στην κατεύθυνση του u.

(γ) Δείξτε ότι: αν η f είναι διαφορίσιμη στο x τότε $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

12. Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\partial h_C(0) = C$.