



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Γεωμετρία των αριθμών - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα ενότητας

3.5 Ασκήσεις	4
------------------------	---

3.5 Ασκήσεις

1. Έστω K κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n . Για κάθε $r \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το πλέγμα $(1/r)\mathbb{Z}^n$. Συμβολίζουμε με N_r τον πληθάριθμο του συνόλου $K \cap (1/r)\mathbb{Z}^n$. Δείξτε ότι

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|K|}{N_r (1/r)^n} = 1.$$

2. (Mordell) Έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω K ένα κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n με $|K| > m$. Τότε, υπάρχει $z \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $K + z$ να περιέχει τουλάχιστον $m + 1$ διακεκριμένα ακέραια σημεία.

3. (van der Corput) Έστω $m \in \mathbb{N}$, και K ένα ανοικτό και φραγμένο, συμμετρικό ως προς το 0, κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , με όγκο $|K| > 2^n m$. Τότε, το K περιέχει τουλάχιστον m ζευγάρια ακεραίων σημείων $\pm u_j \neq 0$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Mordell.

4. (Mahler) Έστω K κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n , το οποίο περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Ο συντελεστής ασυμμετρίας του K ως προς το 0 είναι ο μικρότερος $\sigma = \sigma(K) > 0$ για τον οποίο

$$x \in K \implies -x \in \sigma K.$$

Δείξτε ότι: αν $|K| > (1 + \sigma(K))^n$, τότε $K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

5. Αποδείξτε λεπτομερώς το Θεώρημα 3.2.3.

6. Δείξτε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Για κάθε ελλειψοειδές E με όγκο $|E| > \frac{n+2}{2} 2^{n/2}$ ισχύει $E \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$
2. Για κάθε πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ στον \mathbb{R}^n (όπου $T \in GL(n)$) με $|B_2^n| > \frac{n+2}{2} |\det T|$ ισχύει $B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

7* (Pick) Έστω K κυρτό πολύγωνο με κορυφές σημεία του \mathbb{Z}^2 . Δείξτε ότι το πλήθος των σημείων του $K \cap \mathbb{Z}^2$ είναι ίσο με

$$A(K) + \frac{|\mathbb{Z}^2 \cap \text{bd}(K)|}{2} + 1,$$

όπου $A(K)$ το εμβαδόν του K και $\text{bd}(K)$ το σύνορο του K .

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n . Ένα πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$, όπου $T \in GL(n)$, λέγεται **αποδεκτό** για το K , αν το μόνο σημείο του Λ που ανήκει στο εσωτερικό του K είναι το 0.

Αν $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ όπου $T \in GL(n)$, ορίζουμε $\det \Lambda = |\det T|$. Η **κρίσιμη ορίζουσα** $\Delta(K)$ του K είναι το $\inf(\det \Lambda)$, όπου το *infimum* παίρνεται πάνω από όλα τα πλέγματα Λ που είναι αποδεκτά για το K .

8. Δείξτε ότι:

1. Αν $K \subseteq W$, τότε $\Delta(K) \leq \Delta(W)$.
2. Για κάθε $t > 0$, $\Delta(tK) = t^n \Delta(K)$.
3. Αν $T \in GL(n)$, τότε $\Delta(T(K)) = |\det T| \Delta(K)$.

9. Δείξτε ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n ισχύει

$$\Delta(K) \geq 2^{-n}|K|.$$

10. Συμβολίζουμε με \mathcal{E}_n την κλάση όλων των ελλειψοειδών του \mathbb{R}^n που δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους κανένα σημείο του $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ και ορίζουμε

$$\alpha_n = \sup\{|E| : E \in \mathcal{E}_n\}.$$

Δείξτε ότι

$$\Delta(B_2^n)\alpha_n = \omega_n.$$

Μία οικογένεια $P = \{x_i + rB_2^n : i \in I\}$ από μπάλες ακτίνας $r > 0$, λέγεται **packing** αν οι $x_i + rB_2^n$ έχουν ξένα εσωτερικά. Ορίζουμε άνω και κάτω **πυκνότητα** του P ως εξής: για κάθε $R > 0$, θεωρούμε την RB_2^n , και τις $x_i + rB_2^n$ οι οποίες τέμνουν την RB_2^n . Αν $N(R)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του $\{i \in I : (x_i + rB_2^n) \cap (RB_2^n) \neq \emptyset\}$, ορίζουμε

$$\bar{\delta}(P) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)\omega_n r^n}{\omega_n R^n}$$

και

$$\underline{\delta}(P) = \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)\omega_n r^n}{\omega_n R^n}.$$

Οι αριθμοί $\bar{\delta}(P)$ και $\underline{\delta}(P)$ είναι η άνω και κάτω πυκνότητα του P , αντίστοιχα. Αν $\bar{\delta}(P) = \underline{\delta}(P)$, τότε αυτή η κοινή τιμή είναι η πυκνότητα $\delta(P)$ του P .

Έστω Λ ένα πλέγμα στον \mathbb{R}^n . Ένα **packing με κέντρα στο** Λ είναι ένα packing της μορφής

$$P = \{x + rB_2^n : x \in \Lambda\}.$$

11. Έστω $P = \{x + rB_2^n : x \in \Lambda\}$ ένα packing με κέντρα στο πλέγμα Λ . Δείξτε ότι

$$\delta(P) = \frac{\omega_n r^n}{\det \Lambda}.$$

12. Ορίζουμε δ_n το supremum των $\delta(P)$, όπου P packing με μπάλες ακτίνας 1 και κέντρα σε κάποιο πλέγμα Λ του \mathbb{R}^n . Δείξτε ότι $\alpha_n = 2^n \delta_n$.