ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα ενότητας

7 Χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα

7.1 Απόσταση Banach-Mazur

7.1.1 Φραγμένοι τελεστές

Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \tag{7.1.1}$$

για κάθε $x \in X$. Αν ο T είναι φραγμένος, ορίζουμε τη *νόρμα* $\|T\|$ του T σαν τη μικρότερη σταθερά c για την οποία η $(7.1.1)$ ισχύει για κάθε $x \in X$. Τότε,

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \tag{7.1.2}$$

Έστω $B(X,Y)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$. Ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος, και η $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ με $T \mapsto \|T\|$ είναι νόρμα.

Ο *δυϊκός χώρος* του X είναι ο γραμμικός χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $x^* : X \to \mathbb{R}$. Δηλαδή, $X^* = B(X, \mathbb{R})$.

Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής, και οι $T : X \to Y$, $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένοι τελεστές. Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομετρικός ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός και, επιπλέον, για κάθε $x \in X$ ισχύει $\|Tx\| = \|x\|$. Δύο χώροι X και Y με νόρμα λέγονται *ισομετρικά ισόμορφοι* αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Από τη σκοπιά της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δύο ισομετρικά ισόμορφοι χώροι *ταυτίζονται*: έχουν την ίδια γραμμική και μετρική δομή.

Πρόταση 7.1.1. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Μπορούμε να ορίσουμε νόρμα $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε ο X να είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$.*

Απόδειξη. Έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα του X, και έστω $\{x_1, \ldots, x_n\}$ μία βάση του. Ορίζουμε $T : X \to \mathbb{R}^n$, με

$$T(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) = t_1e_1 + \cdots + t_ne_n, \tag{7.1.3}$$

όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ορίζουμε $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\|t_1e_1 + \cdots + t_ne_n\|' = \|t_1x_1 + \cdots + t_nx_n\|. \tag{7.1.4}$$

Η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, και

$$\|Tx\|' = \|x\| \quad \text{για κάθε} \quad x \in X. \tag{7.1.5}$$

Άρα, ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των X και $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$. □

Μπορούμε λοιπόν πάντα να ταυτίζουμε έναν n-διάστατο χώρο με νόρμα με έναν χώρο της μορφής $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

7.1.2 Απόσταση Banach-Mazur

Η έννοια της απόστασης Banach-Mazur εμφανίζεται στο βιβλίο του Banach «Théorie des opérations linéaires» (1932). Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα, άπειρης ενδεχομένως διάστασης, και ας υποθέσουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y (γράφουμε $X \sim Y$). Ορίζουμε την *απόσταση Banach-Mazur* των X και Y ως εξής:

$$d(X,Y) := \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ ισομορφισμός}\}. \tag{7.1.6}$$

Αν οι X και Y δεν είναι ισόμορφοι ($X \nsim Y$), θέτουμε $d(X,Y) = +\infty$. Οι βασικές ιδιότητες της απόστασης Banach-Mazur περιγράφονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 7.1.2. *Έστω X, Y, Z χώροι με νόρμα. Τότε,*

(i) $d(X,Y) \geq 1$.

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$.

(iii) $d(X,Y) \leq d(X,Z)\, d(Z,Y)$.

(iv) *Αν οι X και Y είναι αυτοπαθείς, τότε $d(X^*,Y^*) = d(X,Y)$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $I_X : X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής. Για κάθε ισομορφισμό $T : X \to Y$ ισχύει

$$1 = \|I_X\| = \|T^{-1}T\| \leq \|T^{-1}\|\, \|T\|, \tag{7.1.7}$$

επομένως,

$$1 \leq d(X,Y). \tag{7.1.8}$$

(ii) Είναι προφανές ότι ο $T : X \to Y$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι ισομορφισμός, και $(T^{-1})^{-1} = T$. Από τον ορισμό της απόστασης βλέπουμε ότι $d(X,Y) = d(Y,X)$.

(iii) Έστω $T' : X \to Z$ και $T'' : Z \to Y$ ισομορφισμοί. Τότε, ο $T = T'' \circ T' : X \to Y$ είναι ισομορφισμός, άρα

$$\begin{aligned} d(X,Y) &\leq \|T\|\, \|T^{-1}\| = \|T'' \circ T'\|\, \|(T')^{-1} \circ (T'')^{-1}\| \\ &\leq \|T''\|\, \|(T'')^{-1}\|\, \|T'\|\, \|(T')^{-1}\|. \end{aligned}$$

Αφού το παραπάνω ισχύει για κάθε T', T'', έπεται ότι

$$d(X,Y) \leq d(X,Z)\, d(Z,Y). \tag{7.1.9}$$

(iv) Έστω $T : X \to Y$ ισομορφισμός. Τότε, ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ του T, που ορίζεται από την $T^*(y^*) = y^* \circ T$ για κάθε $y^* \in Y^*$, είναι ισομορφισμός και ικανοποιεί τις $\|T^*\| = \|T\|$, και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Άρα,

$$\|T\|\, \|T^{-1}\| = \|T^*\|\, \|(T^*)^{-1}\| \geq d(X^*,Y^*), \tag{7.1.10}$$

και αφού ο T ήταν τυχών, συμπεραίνουμε ότι

$$d(X,Y) \geq d(X^*,Y^*). \tag{7.1.11}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι X και Y είναι αυτοπαθείς. Από το προηγούμενο κομμάτι της απόδειξης έχουμε $d(X^*,Y^*) \geq d(X^{**},Y^{**})$. Όμως, ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X^{**}, δηλαδή $d(X,X^{**}) = 1$. Όμοια, $d(Y,Y^{**}) = 1$. Έπεται ότι

$$d(X,Y) \leq d(X,X^{**})d(X^{**},Y^{**})d(Y^{**},Y) = d(X^{**},Y^{**}) \leq d(X^*,Y^*),$$

και συνδυάζοντας με την προηγούμενη ανισότητα βλέπουμε ότι $d(X^*,Y^*) = d(X,Y)$. □

7.1.3 Γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur δίνεται στην επόμενη Πρόταση: η απόσταση δύο χώρων X και Y είναι μικρή αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός της μοναδιαίας μπάλας του X που «μοιάζει» με τη μοναδιαία μπάλα του Y (περιέχει την B_Y και περιέχεται σε «μικρό» πολλαπλάσιο της B_Y).

Πρόταση 7.1.3. *Έστω X και Y ισόμορφοι χώροι με νόρμα. Τότε,*

$$d(X,Y) = \inf\{d > 0 \mid \exists\ T : X \to Y\ :\ B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq d\, B_Y\}. \tag{7.1.12}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $d(X,Y) < d < +\infty$. Από τον ορισμό της απόστασης, υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ με $\|T\|\,\|T^{-1}\| < d$. Από τον ορισμό της νόρμας τελεστή βλέπουμε ότι:

(α) Για κάθε $x \in B_X$ έχουμε $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\,\|x\|_X \leq \|T\|$, άρα

$$T(B_X) \subseteq \|T\|\, B_Y. \tag{7.1.13}$$

(β) Για κάθε $y \in B_Y$ έχουμε $\|T^{-1}y\|_X \leq \|T^{-1}\|\,\|y\|_Y \leq \|T^{-1}\|$, άρα

$$T^{-1}(B_Y) \subseteq \|T^{-1}\|\, B_X, \tag{7.1.14}$$

ή, ισοδύναμα,

$$B_Y \subseteq \|T^{-1}\|\, T(B_X). \tag{7.1.15}$$

Αν θέσουμε $S = \|T^{-1}\|\, T$, τότε, από το (α) έχουμε $S(B_X) \subseteq \|T\|\,\|T^{-1}\|\, B_Y$, και από το (β) έχουμε $B_Y \subseteq S(B_X)$. Δηλαδή, υπάρχει $S : X \to Y$ που ικανοποιεί την

$$B_Y \subseteq S(B_X) \subseteq d\, B_Y. \tag{7.1.16}$$

Αντίστροφα, αν $B_Y \subseteq S(B_X) \subseteq dB_Y$ για κάποιον $S : X \to Y$, τότε $\|S\| \leq d$ και $\|S^{-1}\| \leq 1$. Άρα, $d(X,Y) \leq \|S\|\,\|S^{-1}\| \leq d$. □

7.1.4 Η απόσταση Banach-Mazur σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Υποθέτουμε τώρα ότι $\dim X = \dim Y = n$. Ξέρουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y. Σε αυτή την περίπτωση, η απόσταση Banach-Mazur των X και Y «πιάνεται» για κάποιον ισομορφισμό $T : X \to Y$:

Πρόταση 7.1.4. *Αν $\dim X = \dim Y = n$, τότε*

$$d(X,Y) = \min\{\|T\|\,\|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ ισομορφισμός}\}. \tag{7.1.17}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $\inf$, υπάρχει ακολουθία ισομορφισμών $S_m : X \to Y$ ώστε

$$\|S_m\|\,\|S_m^{-1}\| \to d(X,Y). \tag{7.1.18}$$

Θεωρούμε την ακολουθία $T_m = \|S_m^{-1}\|\, S_m$. Τότε, $\|T_m^{-1}\| = 1$ και

$$\|T_m\| = \|T_m\|\,\|T_m^{-1}\| = \|S_m\|\,\|S_m^{-1}\| \to d(X,Y). \tag{7.1.19}$$

Λόγω της συμπάγειας της μοναδιαίας μπάλας του $B(Y,X)$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $T_{k_m}^{-1} \to S$, όπου $S \in B(Y,X)$ με $\|S\| = 1$. Η $\{\|T_{k_m}\|\}$ είναι φραγμένη, άρα υπάρχει υπακολουθία $T_{\lambda_{k_m}} \to T$, όπου $T \in B(X,Y)$. Επίσης,

$$I_Y = T_{\lambda_{k_m}} \circ T_{\lambda_{k_m}}^{-1} \to T \circ S$$

και $I_X = T^{-1}_{\lambda_{k_m}} \circ T_{\lambda_{k_m}} \to S \circ T$, άρα οι S, T είναι ισομορφισμοί και $S = T^{-1}$. Τέλος,

$$\|T\|\,\|S\| = \lim_{m\to\infty} \|T_{\lambda_{k_m}}\|\,\|T^{-1}_{\lambda_{k_m}}\| = d(X,Y). \tag{7.1.20}$$

Δηλαδή, $\|T\|\,\|T^{-1}\| = d(X,Y)$. □

Πόρισμα 7.1.5. *Αν $\dim X = \dim Y = n$ τότε, $d(X,Y) = 1$ αν και μόνο αν ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y.*

Απόδειξη: Έστω ότι $d(X,Y) = 1$. Από την Πρόταση 7.1.4, υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ ώστε $\|T\|\,\|T^{-1}\| = d(X,Y) = 1$. Άρα, $\|T\| = 1/\|T^{-1}\|$. Έστω $x \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|x\| = \|T^{-1}Tx\| &\leq \|T^{-1}\|\,\|Tx\| = \frac{1}{\|T\|}\|Tx\| \\ &\leq \frac{1}{\|T\|}\|T\|\,\|x\| = \|x\|.\end{aligned}$$

Άρα, ο $T' = T/\|T\| : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Το αντίστροφο είναι προφανές: αν ο $T : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, τότε $1 \leq d(X,Y) \leq \|T\|\,\|T^{-1}\| = 1$. □

7.2 Το Λήμμα του Auerbach

Ορισμός 7.2.1 (διορθογώνιο σύστημα). *Έστω X χώρος με νόρμα. Ονομάζουμε διορθογώνιο σύστημα στον X μία ακολουθία ζευγαριών $(x_i, x_i^*)_{i\in I} \subseteq X \times X^*$ που ικανοποιεί τις*

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{για κάθε} \quad i,j \in I. \tag{7.2.1}$$

Αν, επιπλέον, ικανοποιούνται οι

$$\|x_i\|_X = \|x_i^*\|_{X^*} = 1 \quad \text{για κάθε} \quad i \in I, \tag{7.2.2}$$

τότε το σύστημα λέγεται νορμαρισμένο.

Το *λήμμα του Auerbach* εξασφαλίζει την ύπαρξη νορμαρισμένου διορθογώνιου συστήματος σε κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα.

Θεώρημα 7.2.2 (λήμμα του Auerbach). *Έστω X χώρος με νόρμα διάστασης n. Μπορούμε να βρούμε διανύσματα $x_1, \ldots, x_n \in X$ και $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ που ικανοποιούν τις $\|x_i\| = 1$, $\|x_i^*\| = 1$ και $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$.*

Απόδειξη. Έστω $e_1, e_2, \ldots, e_n$ μία βάση του X. Κάθε $y \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Για κάθε επιλογή n διανυσμάτων $y_1, \ldots, y_n \in X$, γράφουμε

$$y_k = \sum_{i=1}^n y_{ki} e_i, \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{7.2.3}$$

Τότε, τα $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$|\det(y_{ki})_{i,k=1}^n| > 0. \tag{7.2.4}$$

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, ορίζουμε $F : X \times \cdots \times X \to \mathbb{R}$ με

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \det(y_{ki}) \tag{7.2.5}$$

και γράφουμε f για τον περιορισμό της F στο $S_X \times \cdots \times S_X$. Η f είναι $\|\cdot\|$-συνεχής: Αν $y_k^{(m)} \in S_X$, και $\|y_k^{(m)} - y_k\| \to 0$, τότε η ισοδυναμία της $\|\cdot\|$ με την Ευκλείδεια νόρμα δείχνει ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_{ki} - y_{ki}^{(m)})e_i\right\| \geq c\left(\sum_{i=1}^{n}|y_{ki} - y_{ki}^{(m)}|^2\right)^{1/2} \tag{7.2.6}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα e_i, άρα $y_{ki}^{(m)} \to y_{ki}$ για κάθε $i, k \leq n$. Τότε,

$$f(y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)}) = \det(y_{ki}^{(m)}) \to \det(y_{ki}) = f(y_1, \ldots, y_m). \tag{7.2.7}$$

Έπεται ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποια n-άδα $(x_1, \ldots, x_n) \in S_X \times \cdots \times S_X$. Η f είναι περιττή ως προς κάθε y_k, και προφανώς υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητες n-άδες $(y_1, \ldots, y_n)$ στο πεδίο ορισμού της. Άρα, στο σημείο μεγίστου έχουμε

$$f(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad \text{και} \quad |f(y_1, \ldots, y_n)| \leq f(x_1, \ldots, x_n) \tag{7.2.8}$$

για κάθε $y_1, \ldots, y_n \in S_X$. Για $i = 1, \ldots, n$ ορίζουμε

$$x_i^*(x) := \frac{F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{7.2.9}$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι σταθερός και διάφορος του μηδενός, ενώ ο αριθμητής είναι ορίζουσα με μεταβλητή τη στήλη του x (άρα, τα x_i^* είναι γραμμικά συναρτησοειδή). Επίσης,

(α) $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, άρα $\|x_i^*\| \geq x_i^*(x_i) = 1$, και

(β) Αν $\|x\| = 1$, τότε

$$|x_i^*(x)| = \frac{|f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)|}{|f(x_1, \ldots, x_n)|} \leq 1, \tag{7.2.10}$$

άρα $\|x_i^*\| \leq 1$.

Τα (α) και (β) δίνουν το ζητούμενο. □

Με τη βοήθεια του Λήμματος του Auerbach, μπορούμε να δώσουμε μία πρώτη εκτίμηση για την απόσταση Banach-Mazur μεταξύ ενός χώρου X διάστασης n και του ℓ_1^n.

Θεώρημα 7.2.3. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X ισχύει η*

$$d(X, \ell_1^n) \leq n. \tag{7.2.11}$$

Απόδειξη. Έχουμε δεί ότι κάθε n-διάστατος χώρος με νόρμα είναι ισομετρικά ισόμορφος με χώρο της μορφής $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Από το Λήμμα του Auerbach, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in X$ και $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ με $\|x_i\| = 1$, $\|x_i^*\| = 1$ και $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Από την τελευταία ιδιότητα έπεται (άσκηση) ότι τα $x_1, \ldots, x_n$ σχηματίζουν βάση του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |t_i| \tag{7.2.12}$$

και για κάθε $j \leq n$ ισχύει

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right\| \geq \left|x_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)\right| = |t_j|, \tag{7.2.13}$$

συνεπώς,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right\| \geq \max_{1\leq j\leq n} |t_j| \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |t_i|. \tag{7.2.14}$$

Ορίζουμε $T : \ell_1^n \to X$ με $T(e_i) = x_i$. Τότε, για κάθε $y = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i \in \ell_1^n$ έχουμε

$$\|T(y)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |t_i| = \|y\|_{\ell_1^n} \tag{7.2.15}$$

και

$$\|T(y)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right\| \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |t_i| = \frac{1}{n}\|y\|_{\ell_1^n}. \tag{7.2.16}$$

Δηλαδή, για κάθε $y \in \ell_1^n$ έχουμε

$$\frac{1}{n}\|y\|_{\ell_1^n} \leq \|Ty\| \leq \|y\|_{\ell_1^n}. \tag{7.2.17}$$

Από την πρώτη ανισότητα βλέπουμε ότι $\|T^{-1}\| \leq n$, ενώ από τη δεύτερη ότι $\|T\| \leq 1$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Το Θεώρημα 7.2.3 και η πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την απόσταση Banach-Mazur δίνουν ένα άνω φράγμα για την απόσταση οποιωνδήποτε n-διάστατων χώρων X και Y.

Πόρισμα 7.2.4. *Αν X και Y είναι n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε $d(X,Y) \leq n^2$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $d(X,Y) \leq d(X,\ell_1^n) \cdot d(\ell_1^n,Y) \leq n \cdot n = n^2$. □

7.3 Το Banach-Mazur compactum

Το γεγονός ότι ο λογάριθμος της απόστασης Banach-Mazur μοιάζει πολύ με μετρική, οδηγεί στην ιδέα να ορίσουμε τον «μετρικό χώρο των n-διάστατων χώρων». Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{B}_n$ η κλάση όλων των n-διάστατων χώρων με νόρμα. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{B}_n$, θέτοντας

$$X \sim Y \Leftrightarrow d(X,Y) = 1, \tag{7.3.1}$$

δηλαδή αν ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y. Συμβολίζουμε (πάλι) με $\mathcal{B}_n$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την $\sim$, και ορίζουμε τη μετρική ρ που επάγεται από την $log d$ στο $\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n$: Αν $[X],[Y]$ είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας των X και Y, θέτουμε

$$\rho([X],[Y]) = log_{10} d(X,Y). \tag{7.3.2}$$

Η ρ είναι καλά ορισμένη και ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής. Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{B}_n,\rho)$ ονομάζεται *Banach-Mazur compactum.* Στη συνέχεια ταυτίζουμε την $[X]$ με τον X, γιατί σε όλα τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν, ισομετρικά ισόμορφοι χώροι ουσιαστικά συμπίπτουν. Ο όρος compactum δικαιολογείται από την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 7.3.1. *Το Banach-Mazur compactum $(\mathcal{B}_n, \rho)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Το Λήμμα του Auerbach εξασφαλίζει ότι για κάθε $[X] \in \mathcal{B}_n$ υπάρχει $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \in [X]$ ώστε

$$\frac{1}{n}\|x\|_{\ell_1^n} \leq \|x\| \leq \|x\|_{\ell_1^n} \tag{7.3.3}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Γράφουμε Φ_n για το σύνολο όλων των νορμών στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την (7.3.3) και θέτουμε

$$\mathcal{A}_n = \{f = F|_{S_{\ell_1^n}} \mid F \in \Phi_n\}, \tag{7.3.4}$$

το σύνολο των περιορισμών των $F \in \Phi_n$ στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_1^n. Σε κάθε $f \in \mathcal{A}_n$, αντιστοιχεί ένας χώρος $(\mathbb{R}^n, F)$ που ανήκει σε κάποια κλάση $[X]_F \in \mathcal{B}_n$.

Θεωρούμε το $\mathcal{A}_n$ σαν υποσύνολο του $C(S_{\ell_1^n})$ με τη συνήθη μετρική $\|f-g\|_\infty$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{A}_n$ είναι ισοσυνεχές, ομοιόμορφα φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του $C(S_{\ell_1^n})$.

(α) Το $\mathcal{A}_n$ είναι ισοσυνεχές: Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε $\delta = \varepsilon$. Αν $x, y \in S_{\ell_1^n}$ με $\|x-y\|_{\ell_1^n} < \delta$ και $f \in \mathcal{A}_n$, τότε $f = \|\cdot\| \,|_{S_{\ell_1^n}}$ για κάποια $\|\cdot\| \in \Phi_n$. Άρα,

$$|f(x) - f(y)| = \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x-y\| \leq \|x-y\|_{\ell_1^n} < \delta = \varepsilon. \tag{7.3.5}$$

(β) Το $\mathcal{A}_n$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο: Έστω $f \in \mathcal{A}_n$. Τότε, υπάρχει νόρμα $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\ell_1^n}$ ώστε $f = \|\cdot\| \,|_{S_{\ell_1^n}}$, άρα

$$\max_{x \in S_{\ell_1^n}} |f(x)| = \max_{x \in S_{\ell_1^n}} \|x\| \leq \max_{x \in S_{\ell_1^n}} \|x\|_{\ell_1^n} = 1. \tag{7.3.6}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\mathcal{A}_n$ είναι κλειστό, άρα το Θεώρημα Ascoli μας εξασφαλίζει ότι το $\mathcal{A}_n$ είναι συμπαγές.

Ορίζουμε τώρα μία απεικόνιση $\phi : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_n$ ως εξής: αν $f \in \mathcal{A}_n$, τότε υπάρχει $\|\cdot\|_f$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $\|\cdot\|_f|_{S_{\ell_1^n}} = f$ και $\frac{1}{n}\|\cdot\|_{\ell_1^n} \leq \|\cdot\|_f \leq \|\cdot\|_{\ell_1^n}$. Θέτουμε $\phi(f) = [X_f]$, όπου $X_f = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_f)$. Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι *επί*. Αφού ο $\mathcal{A}_n$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη μετρική που επάγεται από την $\|\cdot\|_\infty$, αν δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής, θα συμπεράνουμε ότι ο $\phi(\mathcal{A}_n) = \mathcal{B}_n$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι $f_m, f \in \mathcal{A}_n$ και ότι $f_m \to f$ ομοιόμορφα στην $S_{\ell_1^n}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $X_{f_m} \to X_f$ ως προς την απόσταση Banach-Mazur.

Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I_m : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_m) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού η $\|\cdot\|_m$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\|\cdot\|$ στην $S_{\ell_1^n}$, υπάρχει $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $m \geq m_0$ και κάθε $x \in S_{\ell_1^n}$, $\Big|\|x\|_m - \|x\|\Big| < \varepsilon$. Άρα,

$$\|x\| \leq \|x\|_m + \varepsilon \leq \|x\|_m + \varepsilon n\|x\|_m = (1+\varepsilon n)\|x\|_m \tag{7.3.7}$$

και

$$\|x\|_m \leq \|x\| + \varepsilon \leq (1+\varepsilon n)\|x\|. \tag{7.3.8}$$

Αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\frac{x}{\|x\|_{\ell_1^n}} \in S_{\ell_1^n}$, οπότε για κάθε $m \geq m_0$ έχουμε

$$\Big\|\frac{x}{\|x\|_{\ell_1^n}}\Big\| \leq (1+\varepsilon n)\Big\|\frac{x}{\|x\|_{\ell_1^n}}\Big\|_m \quad \Longrightarrow \quad \|x\| \leq (1+\varepsilon n)\|x\|_m. \tag{7.3.9}$$

Δηλαδή, $\|I_m\| \leq 1 + \varepsilon n$. Όμοια, $\|x\|_m \leq (1+\varepsilon n)\|x\|$, άρα

$$\|I_m^{-1}\| \leq (1+\varepsilon n). \tag{7.3.10}$$

Έπεται ότι

$$d(\|\cdot\|_m, \|\cdot\|) \leq \|I_m\| \cdot \|I_m^{-1}\| \leq (1+\varepsilon n)^2 \tag{7.3.11}$$

για κάθε $m \geq m_0$. Άρα,

$$d(\|\cdot\|_m, \|\cdot\|) \to 1, \tag{7.3.12}$$

όταν το $m \to \infty$. □

7.4 Ελλειψοειδές μέγιστου όγκου ενός κυρτού σώματος

Ορισμός 7.4.1. *Ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής*

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\}, \tag{7.4.1}$$

όπου $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του E αντίστοιχα).

Πρόταση 7.4.2. *Ένα κυρτό σώμα E στον $\mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός T ($T \in GL(n)$) ώστε $E = T(B_2^n)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι ελλειψοειδές, δηλαδή ορίζεται από την (7.4.1) για κάποια ορθοκανονική βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ και κάποιους $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$. Έστω T ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ο T είναι προφανώς αντιστρέψιμος, και $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν υπάρχει $y = \sum\limits_{j=1}^{n} t_j v_j \in B_2^n$ με $x = Ty$. Τότε όμως, η ισότητα

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \sum_{j=1}^{n} t_j \alpha_j v_j, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \tag{7.4.2}$$

δείχνει ότι $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν $x \in E$, δηλαδή $E = T(B_2^n)$.

Αντίστροφα, έστω $T \in GL(n)$ και $E = T(B_2^n)$. Αν γράψουμε $S = T^{-1}$, έχουμε

$$\|x\|_E^2 = \|x\|_{S^{-1}(B_2^n)}^2 = \|Sx\|_2^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle. \tag{7.4.3}$$

Ο S^*S είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα γράφεται στη μορφή U^*DU όπου D διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $\alpha_1^{-2}, \ldots, \alpha_n^{-2}$ (όπου α_i θετικοί πραγματικοί αριθμοί) και ο U είναι ορθογώνιος πίνακας. Θεωρούμε το διαγώνιο πίνακα $D_1 = \sqrt{D}$ με διαγώνια στοιχεία τα $\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}$. Αφού ο U είναι ορθογώνιος, έχουμε $S^*S = A^2$, όπου $A = U^*D_1U$. Δηλαδή,

$$\|x\|_E^2 = \langle A^2x, x\rangle = \|Ax\|_2^2 = \|D_1Ux\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle Ux, e_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2}, \tag{7.4.4}$$

όπου τα $v_i = U^* e_i$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι $x \in E$ αν και μόνο αν ικανοποιείται η (7.4.1) για τα συγκεκριμένα v_i και α_i, δηλαδή το E είναι ελλειψοειδές. □

Παρατήρηση. Από την απόδειξη είναι φανερό ότι ο όγκος του E ισούται με

$$|E| = |B_2^n| \prod_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{7.4.5}$$

Θεωρούμε τώρα ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και την οικογένεια $\mathcal{E}(K)$ όλων των *ελλειψοειδών* που περιέχονται στο K. Ο F. John (1948) έδειξε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Θα λέμε ότι το E είναι το **ελλειψοειδές μέγιστου όγκου** του K. Θα δούμε ταυτόχρονα ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχει το K και έχει ελάχιστο όγκο:

Θεώρημα 7.4.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \supseteq K$ με ελάχιστο όγκο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{F}(K)$ όλων των ελλειψοειδών που περιέχουν το K και ορίζουμε

$$V = \inf\{|E| : \ E \in \mathcal{F}(K)\} > 0. \tag{7.4.6}$$

Υπάρχει ακολουθία $T_m \in GL(n)$ για την οποία έχουμε $E_m = T_m^{-1}(B_2^n) \supseteq K$ και

$$|E_m| = \frac{|B_2^n|}{|\det(T_m)|} \to V. \tag{7.4.7}$$

Αφού $\|T_m : X_K \to \ell_2^n\| \leq 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{T_{k_m}\}$ και $S \in L(\mathbb{R}^n)$ με $T_{k_m} \to S$. Τότε,

$$|\det(S)| = |B_2^n|/V > 0, \tag{7.4.8}$$

άρα $S \in GL(n)$. Ορίζουμε $E = S^{-1}(B_2^n)$. Τότε,

$$\|S : X_K \to \ell_2^n\| = \lim_{m\to\infty} \|T_{k_m} : X_K \to \ell_2^n\| \leq 1, \tag{7.4.9}$$

άρα $E \supseteq K$. Αφού $|E| = V$, το E είναι ένα ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει τον ελάχιστο δυνατό όγκο.

Δείχνουμε τώρα ότι υπάρχει ένα μόνο ελλειψοειδές με αυτή την ιδιότητα. Έστω ότι τα E_1 και E_2 περιέχουν το K και έχουν ελάχιστο όγκο. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E_1 = B_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle^2 / \alpha_i^2 \leq 1 \right\}. \tag{7.4.10}$$

Θεωρούμε ένα τρίτο ελλειψοειδές, το

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(1 + \alpha_i^{-2}) \langle x, v_i \rangle^2 \leq 1 \right\}. \tag{7.4.11}$$

Αφού $F \supseteq E_1 \cap E_2 \supseteq K$, έχουμε

$$|F| \geq |E_1| = |E_2| = |B_2^n|, \tag{7.4.12}$$

άρα $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$. Παίρνοντας υπόψιν την (7.4.5), γράφουμε την (7.4.12) στη μορφή

$$\begin{aligned} 1 = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 &\leq \prod_{i=1}^n \frac{2}{1+\alpha_i^{-2}} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i^2}{1+\alpha_i^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i^2}. \end{aligned}$$

Όμως, $2\alpha_i \leq 1 + \alpha_i^2$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ με ισότητα μόνο αν $\alpha_i = 1$. Άρα, $\alpha_i = 1, i = 1, \ldots, n$. Έπεται ότι $E_1 = E_2$. □

Το Θεώρημα 7.4.3 και ένα απλό επιχείρημα δυϊσμού εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα του ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου του K.

Θεώρημα 7.4.4. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \in \mathcal{E}(K)$ με μέγιστο όγκο.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.4.3 υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές F ελάχιστου όγκου του K°. Θεωρούμε το $E = F^\circ$. Τότε $E \subseteq K$, το E είναι ελλειψοειδές (άσκηση) και αν E_1 είναι ένα άλλο ελλειψοειδές με $E_1 \subseteq K$, τότε $E_1^\circ \supseteq K^\circ$, άρα $|E_1^\circ| \geq |F|$. Τότε,

$$|E_1| = \frac{|B_2^n|^2}{|E_1^\circ|} \leq \frac{|B_2^n|^2}{|F|} = |E|. \tag{7.4.13}$$

Ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $E_1^\circ = F$, δηλαδή $E_1 = E$. Άρα, το E είναι το μοναδικό ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. □

7.5 Το θεώρημα του John: στοιχειώδης απόδειξη

O F. John (1948) έδειξε ότι αν η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, τότε $B_2^n \subseteq \sqrt{n}K$. Άμεση συνέπεια αυτού του ισχυρισμού είναι ένα άνω φράγμα για την απόσταση Banach-Mazur τυχόντος n-διάστατου χώρου με νόρμα από τον ℓ_2^n.

Θεώρημα 7.5.1. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X έχουμε $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Θεωρούμε τη μοναδιαία μπάλα B_X του X και το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου E της B_X. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε $E = T^{-1}(B_2^n)$. Τότε, $T(B_X) \subseteq B_2^n$ και η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του $T(B_X)$. Αν δεχτούμε το θεώρημα του John, τότε

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subseteq T(B_X) \subseteq B_2^n. \tag{7.5.1}$$

Έπεται ότι

$$\|T : X \to \ell_2^n\| \cdot \|T^{-1} : \ell_2^n \to X\| \leq 1 \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}, \tag{7.5.2}$$

άρα, $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$. □

Το Θεώρημα 7.5.1 και η πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d μας δίνουν ένα άνω φράγμα για τη διάμετρο του Banach-Mazur compactum.

Θεώρημα 7.5.2. *Αν X και Y είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε $d(X,Y) \leq n$.* □

Δίνουμε τώρα μία στοιχειώδη απόδειξη του Θεωρήματος του John:

Θεώρημα 7.5.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Τότε,*

$$B_2^n \subseteq \sqrt{n}K. \tag{7.5.3}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει x στο σύνορο του K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο της $(1/\sqrt{n})B_2^n$. Αλλάζοντας συντεταγμένες αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του K στο x είναι παράλληλο με το $\{x : x_1 = 0\}$. Δηλαδή,

$$K \subset P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq \frac{1}{c} \right\}, \tag{7.5.4}$$

όπου $c > \sqrt{n}$. Για κάθε $a, b > 0$ ορίζουμε το ελλειψοειδές

$$E_{a,b} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a^2 x_1^2 + b^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}. \tag{7.5.5}$$

Ισχυρισμός. Αν $\frac{a^2-b^2}{c^2} + b^2 \leq 1$, τότε $K \subseteq E_{a,b}$.

Πράγματι: αν $y \in K$, τότε $y \in P \cap B_2^n$. Άρα,

$$|y_1| \leq \frac{1}{c} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq 1. \tag{7.5.6}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} a^2 y_1^2 + b^2 \sum_{i=2}^{n} y_i^2 &= (a^2 - b^2) y_1^2 + b^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &\leq \frac{a^2 - b^2}{c^2} + b^2 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $y \in E_{a,b}$. □

Ο όγκος του $E_{a,b}$ ισούται με $|E_{a,b}| = |B_2^n|/(ab^{n-1})$. Αν λοιπόν $ab^{n-1} > 1$, τότε $|E_{a,b}| < |B_2^n|$. Με την υπόθεση ότι $c > \sqrt{n}$, θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις

$$ab^{n-1} > 1 \quad \text{και} \quad \frac{a^2 - b^2}{c^2} + b^2 \leq 1. \tag{7.5.7}$$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί θα έχουμε βρεί ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει όγκο γνήσια μικρότερο από τον όγκο της B_2^n.

Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1/2)$, θέτουμε $b_\varepsilon = 1 - \varepsilon$ και $a_\varepsilon = (1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2)^{n-1}$. Τότε,

$$a_\varepsilon b_\varepsilon^{n-1} = [(1-\varepsilon)(1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2)]^{n-1} = (1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3)^{n-1} > 1. \tag{7.5.8}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\frac{a_\varepsilon^2-b_\varepsilon^2}{c^2}+b_\varepsilon^2 &= \frac{(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)^{2(n-1)}}{c^2}+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-\varepsilon)^2\\ &= \frac{1}{c^2}[1+2(n-1)\varepsilon+O(\varepsilon^2)]+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-2\varepsilon+\varepsilon^2)\\ &= 1+2\varepsilon\left(\frac{n}{c^2}-1\right)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Αφού $(n/c^2)-1<0$, είναι φανερό ότι η ποσότητα αυτή γίνεται μικρότερη από 1 αν αφήσουμε το $\varepsilon\to 0^+$. Για μικρό λοιπόν $\varepsilon>0$, το ελλειψοειδές $E_{a_\varepsilon,b_\varepsilon}$ μας οδηγεί σε άτοπο. □

7.6 Σημεία επαφής και η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η B_2^n. Το $u\in\mathbb{R}^n$ λέγεται *σημείο επαφής* των K και B_2^n αν $\|u\|_2=\|u\|_K=1$, δηλαδή αν $x\in\mathrm{bd}(K)\cap\mathrm{bd}(B_2^n)$. Η «πλήρης έκδοση» του θεωρήματος του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής πάνω στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 7.6.1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_m>0$ και σημεία επαφής $u_1,\dots,u_m$ των K και B_2^n ώστε*

$$x=\sum_{j=1}^m\lambda_j\langle x,u_j\rangle u_j \tag{7.6.1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις. Το Θεώρημα 7.6.1 λέει ότι η ταυτοτική απεικόνιση I του $\mathbb{R}^n$ αναπαρίσταται στη μορφή

$$I=\sum_{j=1}^m\lambda_j u_j\otimes u_j, \tag{7.6.2}$$

όπου $u_j\otimes u_j$ είναι η προβολή στην διεύθυνση του u_j: $(u_j\otimes u_j)(x)=\langle x,u_j\rangle u_j$.

Από την (7.6.1) έπεται ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2=\langle x,x\rangle=\sum_{j=1}^m\lambda_j\langle x,u_j\rangle^2. \tag{7.6.3}$$

Επίσης, παίρνοντας $x=e_i$, $i=1,\dots,n$, όπου $\{e_1,\dots,e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\|e_i\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\lambda_j\langle e_i,u_j\rangle^2=\sum_{j=1}^m\lambda_j\sum_{i=1}^n\langle e_i,u_j\rangle^2\\ &= \sum_{j=1}^m\lambda_j\|u_j\|_2^2=\sum_{j=1}^m\lambda_j.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{j=1}^m\lambda_j=n. \tag{7.6.4}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος. Από την (7.6.4), αν υπάρχει η ζητούμενη αναπαράσταση θα πρέπει να ισχύει $\sum(\lambda_j/n) = 1$. Αυτό λοιπόν που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι ο I/n γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός προβολών της μορφής $u \otimes u$, όπου u σημείο επαφής των K και B_2^n. Ορίζουμε

$$T = \{u \otimes u : \|u\|_2 = \|u\|_K = 1\}, \tag{7.6.5}$$

και θα δείξουμε ότι $I/n \in \mathrm{conv}(T)$. Παρατηρήστε ότι το $\mathrm{conv}(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$ και ότι $T \neq \emptyset$: αν η B_2^n δεν ακουμπούσε το σύνορο του K, θα μπορούσαμε να βρούμε $r > 1$ ώστε $rB_2^n \subseteq K$, οπότε η B_2^n δεν θα ήταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

Έστω ότι $I/n \notin \mathrm{conv}(T)$. Από διαχωριστικό θεώρημα, μπορύμε να βρούμε $\phi \in \mathbb{R}^{n^2}$ και $r \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle \phi, I/n\rangle < r \leq \langle \phi, A\rangle \tag{7.6.6}$$

για κάθε $A \in \mathrm{conv}(T)$. Ειδικότερα, για κάθε σημείο επαφής u των K και B_2^n έχουμε

$$\langle \phi, I/n\rangle < r \leq \langle \phi, u \otimes u\rangle. \tag{7.6.7}$$

Οι πίνακες I/n και $u \otimes u$ είναι συμμετρικοί, οπότε παίρνοντας τον $\psi = (\phi + \phi^*)/2$ αντί του ϕ έχουμε ότι ο ψ είναι συμμετρικός και εξακολουθεί να ικανοποιεί την

$$\langle \psi, I/n\rangle < r \leq \langle \psi, u \otimes u\rangle \tag{7.6.8}$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. Έστω $\beta = \mathrm{tr}(\psi)/n$. Αφού $\mathrm{tr}(I/n) = 1$ και $\mathrm{tr}(u \otimes u) = \sum u_i^2 = 1$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle \psi - \beta I, I/n\rangle &= \langle \psi, I/n\rangle - \beta \\ &= 0 < r - \beta \\ &\leq \langle \psi - \beta I, u \otimes u\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. Παίρνοντας $B = \psi - \beta I$ και $s = r - \beta$, έχουμε:

Λήμμα 7.6.2. *Αν $I/n \notin \mathrm{conv}(T)$, τότε υπάρχουν $s > 0$ και B συμμετρικός με $\mathrm{tr}(B) = 0$ με την ιδιότητα*

$$\langle B, u \otimes u\rangle \geq s \tag{7.6.9}$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. □

Για $\delta > 0$ αρκετά μικρό, θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle (I + \delta B)x, x\rangle \leq 1\}. \tag{7.6.10}$$

(Παρατηρήστε ότι αν $M = \max\{|\langle Bx, y\rangle| : \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1\}$ και $0 < \delta < 1/M$, τότε ο $I + \delta B$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα έχει συμμετρική θετική τετραγωνική ρίζα S_δ. Αφού $E_\delta = S_\delta^{-1}(B_2^n)$, το E_δ είναι ελλειψοειδές.)

Ορισμός 7.6.3 (ακτινική συνάρτηση). *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θέτουμε*

$$\rho_K(\theta) = \max\{t > 0 : t\theta \in K\}. \tag{7.6.11}$$

Η $\rho_K : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ λέγεται ακτινική συνάρτηση του K: «μετράει» την απόσταση του συνόρου του K από το 0 στη διεύθυνση του θ. Αφού $\rho_K(\theta)\theta \in \mathrm{bd}(K)$, έχουμε

$$\rho_K(\theta) \cdot \|\theta\|_K = 1. \tag{7.6.12}$$

Θα δείξουμε ότι $E_\delta \subseteq K$ αν το δ είναι μικρό, δείχνοντας ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \rho_K(v)$ για κάθε $v \in S^{n-1}$:

1η Περίπτωση: Έστω U το σύνολο των σημείων επαφής των K και B_2^n. Αν $u \in U$ και $v \in S^{n-1}$ με $\|u - v\|_2 < s/2M$, τότε από το Λήμμα 7.6.2,

$$\langle (I + \delta B)u, u\rangle \geq 1 + \delta s, \tag{7.6.13}$$

ενώ

$$\begin{aligned} |\langle v + \delta Bv, v\rangle - \langle u + \delta Bu, u\rangle| &= \delta|\langle Bv, v\rangle - \langle Bu, u\rangle| \\ &\leq \delta|\langle Bv, v - u\rangle| + \delta|\langle Bu, u - v\rangle| \\ &\leq 2M\delta\|u - v\|_2 < \delta s. \end{aligned}$$

Άρα, αν η απόσταση του $v \in S^{n-1}$ από το U είναι μικρότερη από $s/2M$, τότε

$$\langle (I + \delta B)v, v\rangle > 1 + \delta s - \delta s = 1, \tag{7.6.14}$$

δηλαδή $v \notin E_\delta$. Όμως, $v \in B_2^n \subseteq K$ για κάθε $v \in S^{n-1}$. Άρα, σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\rho_{E_\delta}(v) < 1 \leq \rho_K(v). \tag{7.6.15}$$

2η Περίπτωση: Έστω V το σύνολο των $v \in S^{n-1}$ για τα οποία $d(v, U) \geq s/2M$. Τότε, το V είναι συμπαγές και $r = \max\{\|v\|_K : v \in V\} < 1$. Θέτουμε $\lambda = \min\{\langle Bv, v\rangle : v \in V\}$. Αν $0 < \delta < (1 - r^2)/|\lambda|$, τότε

$$\langle (I + \delta B)(v/\|v\|_K), v/\|v\|_K\rangle = \frac{1 + \delta\langle Bv, v\rangle}{\|v\|_K^2} \geq \frac{1 + \delta\lambda}{r^2} > 1, \tag{7.6.16}$$

δηλαδή $v/\|v\|_K \notin E_\delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \frac{1}{\|v\|_K} = \rho_K(v)$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής:

Λήμμα 7.6.4. *Υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε $E_\delta \subseteq K$ για κάθε $0 < \delta < \delta_0$.* □

Μπορούμε τώρα να καταλήξουμε σε άτοπο: Παίρνουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε ο $I + \delta B$ να είναι θετικά ορισμένος και το ελλειψοειδές E_δ να περιέχεται στο K. Αφού η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, έχουμε $|E_\delta| \leq |B_2^n|$. Όμως,

$$|E_\delta| = |S_\delta^{-1}(B_2^n)| = |B_2^n|/\sqrt{\det(I + \delta B)}. \tag{7.6.17}$$

Άρα, $\det(I + \delta B) \geq 1$. Από την άλλη πλευρά, η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου μας δίνει

$$[\det(I + \delta B)]^{1/n} \leq \frac{\mathrm{tr}(I + \delta B)}{n} = 1 + \delta\frac{\mathrm{tr}(B)}{n} = 1, \tag{7.6.18}$$

αφού $\mathrm{tr}(B) = 0$. Για να ισχύουν τα παραπάνω, πρέπει να έχουμε ισότητα στην ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Τότε όμως, όλες οι ιδιοτιμές του $I + \delta B$ είναι ίσες, δηλαδή $I + \delta B = \mu I$. Έπεται ότι ο B είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, και αφού $\mathrm{tr}(B) = 0$ παίρνουμε $B = 0$.

Αυτό είναι άτοπο, γιατί από το Λήμμα 7.6.2 έχουμε $\langle Bu, u\rangle \geq s > 0$, $u \in U$. Συνεπώς, $I/n \in \mathrm{conv}(T)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία δεύτερη απόδειξη για το θεώρημα του John:

Πρόταση 7.6.5. *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j \tag{7.6.19}$$

του Θεωρήματος 7.6.1. Αφού $u_j \in S^{n-1}$, έχουμε

$$1 = \langle u_j, u_j \rangle \leq \|u_j\|_K \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_{K^\circ} \quad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, m. \tag{7.6.20}$$

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε u_j τα K και B_2^n έχουν το ίδιο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο με κάθετο διάνυσμα το u_j (για τη μπάλα, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο σε κάθε σημείο $u \in S^{n-1}$ έχει κάθετο διάνυσμα το u). Επομένως, για κάθε $x \in K$ έχουμε $\langle x, u_j \rangle \leq 1$, και λόγω συμμετρίας του K,

$$|\langle x, u_j \rangle| \leq 1 \quad \text{για κάθε } x \in K. \tag{7.6.21}$$

Δηλαδή,

$$\|u_j\|_K = \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_2 = 1 \tag{7.6.22}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, m$.

Έστω τώρα $x \in K$. Από τις (7.6.3), (7.6.4) και (7.6.21) παίρνουμε

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n. \tag{7.6.23}$$

Δηλαδή, $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}$. Αρα, $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$. □

Παρατήρηση 7.6.6. *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K°. Επίσης, η (7.6.22) δείχνει ότι κάθε σημείο επαφής των K και B_2^n είναι σημείο επαφής των K° και B_2^n. Άρα, αλλάζοντας τους ρόλους των K και K°, βλέπουμε ότι η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης μέσω σημείων επαφής εξασφαλίζεται και στην περίπτωση του ελλειψοειδούς ελάχιστου όγκου.*

7.7 Λήμματα Dvoretzky-Rogers

Σε αυτή την Παράγραφο υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό σώμα K έχει σαν ελλειψοειδές μέγιστου ή ελάχιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Στην §7.6 αποδείξαμε το θεώρημα του John για την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης: υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ώστε

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j. \tag{7.7.1}$$

Συνέπειες της (7.7.1) είναι οι εξής: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 \tag{7.7.2}$$

και

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n. \tag{7.7.3}$$

Χρησιμοποιώντας την (7.7.1) μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχουν πολλά σημεία επαφής ανάμεσα στο K και στην B_2^n.

Πρόταση 7.7.1. *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου ή μέγιστου όγκου του K, τότε για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$ υπάρχει σημείο επαφής των K και B_2^n με την ιδιότητα:*

$$\langle u, Tu\rangle \geq \frac{\mathrm{tr}T}{n}. \tag{7.7.4}$$

Απόδειξη. Από την (7.7.1) έχουμε

$$\mathrm{tr}T = \langle T, I\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle T, u_j \otimes u_j\rangle. \tag{7.7.5}$$

Παίρνοντας υπόψιν και την $\sum \lambda_j = n$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $j \leq m$ με την ιδιότητα

$$\langle u_j, Tu_j\rangle = \langle T, u_j \otimes u_j\rangle \geq \frac{\mathrm{tr}T}{n}. \tag{7.7.6}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει αν πάρουμε $u = u_j$. □

Οι Dvoretzky και Rogers έδειξαν ακριβή αποτελέσματα γιά την κατανομή των σημείων επαφής του K με την B_2^n. Ολα τους εκφράζουν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο την αρχή ότι υπάρχουν πολλές και «αρκετά ορθογώνιες» διευθύνσεις στις οποίες οι δύο νόρμες $\|\cdot\|_K$ και $\|\cdot\|_2$ συγκρίνονται καλά.

Πρόταση 7.7.2. *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $y_1, \ldots, y_n$ στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα*

$$\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^{1/2} \leq \|y_i\|_K \leq \|y_i\|_2 = 1 \tag{7.7.7}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τα y_i επαγωγικά. Σαν y_1 μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σημείο επαφής των K και B_2^n. Ας υποθέσουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $y_1, \ldots, y_{i-1}$. Θέτουμε $F_i = \mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}$. Τότε, $\mathrm{tr}(P_{F_i^\perp}) = n - i + 1$, και από την Πρόταση 7.7.1 υπάρχει σημείο επαφής u_i ώστε

$$\|P_{F_i^\perp} u_i\|_2^2 = \langle u_i, P_{F_i^\perp} u_i\rangle \geq \frac{n-i+1}{n}. \tag{7.7.8}$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έπεται ότι

$$\|P_{F_i} u_i\|_K \leq \|P_{F_i} u_i\|_2 \leq \sqrt{(i-1)/n}. \tag{7.7.9}$$

Ορίζουμε $y_i = P_{F_i^\perp} u_i / \|P_{F_i^\perp} u_i\|_2$. Τότε,

$$1 = \|y_i\|_2 \geq \|y_i\|_K \geq |\langle u_i, y_i\rangle| = \|P_{F_i^\perp} u_i\|_2 \tag{7.7.10}$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από την (7.7.8). □

Πόρισμα 7.7.3. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Αν $k = [n/2]+1$, μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $y_1,\ldots,y_k$ ώστε*

$$\frac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1 \tag{7.7.11}$$

για κάθε $j = 1,\ldots,k$. □

Το επόμενο λήμμα «τύπου Dvoretzky-Rogers» αποδείχθηκε από τους Szarek και Talagrand (1988).

Πρόταση 7.7.4. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K. Για κάθε $k \leq n$, μπορούμε να βρούμε σημεία επαφής $y_1,\ldots,y_k$ των K και B_2^n, με την εξής ιδιότητα: Αν $j \in \{1,\ldots,k\}$ και $F_j = \mathrm{span}\{y_i : i \neq j\}$, τότε*

$$|P_{F_j^\perp}(y_j)| \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \tag{7.7.12}$$

για κάθε $j = 1,\ldots,k$.

Απόδειξη. Έστω $k \leq n$. Υπάρχουν σημεία επαφής $u_1,\ldots,u_m$ των K και B_2^n, και $\lambda_1,\ldots,\lambda_m > 0$ ώστε

$$I = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j \otimes u_j. \tag{7.7.13}$$

Από όλες τις k-άδες που μπορούμε να επιλέξουμε μέσα από το $\{u_1,\ldots,u_m\}$, επιλέγουμε εκείνα τα $y_1 = u_{i_1},\ldots,y_k = u_{i_k}$ για τα οποία μεγιστοποιείται ο k-διάστατος όγκος $|\mathrm{conv}\{\pm u_{i_1},\ldots,\pm u_{i_k}\}|$. Αν θέσουμε $F_j = \mathrm{span}\{y_i : i \neq j\}$, τότε

$$\|P_{F_j^\perp}(y_j)\|_2 \geq \|P_{F_j^\perp}(u_i)\|_2 \quad \text{για κάθε } j = 1,\ldots,k \text{ και } i = 1,\ldots,m. \tag{7.7.14}$$

Όμως, από την Πρόταση 7.7.1, υπάρχει $i \leq m$ ώστε

$$\|P_{F_j^\perp}(u_i)\|_2^2 = \langle u_i, P_{F_j^\perp}(u_i)\rangle \geq \frac{\mathrm{tr}(P_{F_j^\perp})}{n} = \frac{n-k+1}{n}. \tag{7.7.15}$$

Άρα,

$$\|P_{F_j^\perp}(y_j)\|_2 = \max_{i\leq m} \|P_{F_j^\perp}(u_i)\|_2 \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \tag{7.7.16}$$

για κάθε $j = 1,\ldots,k$. □