ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Συνδυαστικά θεωρήματα για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

2 Συνδυαστικά θεωρήματα για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο

2.1 Κυρτή θήκη

Στην §1.1 δώσαμε τον ορισμό του κυρτού συνόλου. Αν x και y είναι δύο σημεία στον $\mathbb{R}^n$, το *ευθύγραμμο τμήμα* $[x, y]$ με άκρα τα x και y είναι το σύνολο όλων των σημείων της μορφής $x + t(y - x)$ με $t \in [0, 1]$:

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}. \tag{2.1.1}$$

Ένα μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *κυρτό* αν για κάθε $x, y \in A$ και για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$(1 - t)x + ty \in A. \tag{2.1.2}$$

Δηλαδή, το A είναι κυρτό αν, για κάθε δύο σημεία του, περιέχει ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει.

Σημείωση: Συμφωνούμε ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι κυρτό (παρατηρήστε ότι «ικανοποιεί κατά τετριμμένο τρόπο» τον ορισμό).

Ορισμός 2.1.1 (κυρτός συνδυασμός). *Έστω $m \geq 1$ και $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^n$. Αν $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ και $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε το*

$$x = t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m \tag{2.1.3}$$

λέγεται κυρτός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_m$.

Από τον ορισμό του κυρτού συνόλου, ένα σύνολο είναι κυρτό αν περιέχει τους κυρτούς συνδυασμούς οποιωνδήποτε δύο σημείων του. Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Πρόταση 2.1.2. *Ένα μη κενό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό αν και μόνο αν κάθε κυρτός συνδυασμός σημείων του A ανήκει στο A.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι απλή: αν κάθε κυρτός συνδυασμός σημείων του A ανήκει στο A, τότε για κάθε $x, y \in A$ και $t \in [0, 1]$, παίρνοντας $t_1 = 1 - t$ και $t_2 = t$ βλέπουμε ότι ο κυρτός συνδυασμός $(1 - t)x + ty$ ανήκει στο A. Άρα, το A είναι κυρτό.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θεωρούμε ένα κυρτό σύνολο A. Θα δείξουμε ότι, για τυχόντα $x_1, \ldots, x_m \in A$ και $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$ ισχύει $t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m \in A$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το m. Ο ορισμός της κυρτότητας του A εξασφαλίζει την περίπτωση $m = 2$ (αν $m = 1$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για οποιονδήποτε κυρτό συνδυασμό από m ή λιγότερα σημεία, και θεωρούμε έναν κυρτό συνδυασμό $x = \sum_{i=1}^{m+1} t_i x_i$, όπου $x_i \in A$.

Αφού $\sum_{i=1}^{m+1} t_i = 1$ και $m + 1 > 1$, κάποιος από τους t_i είναι μικρότερος από 1. Αλλάζοντας τη σειρά των t_i, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_{m+1} < 1$. Τότε,

$$x = (1 - t_{m+1}) \sum_{i=1}^{m} \frac{t_i}{1 - t_{m+1}} x_i + t_{m+1} x_{m+1} = (1 - t_{m+1}) y + t_{m+1} x_{m+1}, \tag{2.1.4}$$

όπου

$$y=\sum_{i=1}^{m}\frac{t_i}{1-t_{m+1}}x_i. \tag{2.1.5}$$

Αφού $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i = 1-t_{m+1}$, το y είναι κυρτός συνδυασμός m σημείων του A. Από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε $y \in A$. Χρησιμοποιώντας ξανά την επαγωγική υπόθεση για τα y και x_{m+1} ($m=2$) συμπεραίνουμε ότι $x \in A$. □

Πρόταση 2.1.3. (i) *Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Η τομή $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ των A_i είναι κυρτό σύνολο.*

(ii) *Έστω (A_m) μία αύξουσα ακολουθία κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$: δηλαδή, $A_m \subseteq A_{m+1}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, η ένωση $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ των A_m είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Ορισμός 2.1.4 (κυρτή θήκη)**.** *Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η κυρτή θήκη του S είναι το σύνολο $\mathrm{conv}(S)$ που αποτελείται από όλους τους κυρτούς συνδυασμούς σημείων του S.*

Πρόταση 2.1.5. *Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η κυρτή θήκη του S είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το S. Δηλαδή,*

1. *Το σύνολο $\mathrm{conv}(S)$ είναι κυρτό.*
2. *Αν το A είναι κυρτό σύνολο και $A \supseteq S$ τότε $A \supseteq \mathrm{conv}(S)$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $x, y \in \mathrm{conv}(S)$ και έστω $t \in [0,1]$. Τα x και y γράφονται σαν κυρτοί συνδυασμοί σημείων του S:

$$x=\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \quad \text{και} \quad y=\sum_{j=1}^{m} b_j y_j. \tag{2.1.6}$$

Τότε,

$$(1-t)x+ty=\sum_{i=1}^{k}((1-t)a_i)x_i+\sum_{j=1}^{m}(tb_j)y_j \in \mathrm{conv}(S) \tag{2.1.7}$$

γιατί $x_i, y_j \in S$ και

$$\sum_{i=1}^{k}(1-t)a_i+\sum_{j=1}^{m}tb_j=(1-t)\sum_{i=1}^{k}a_i+t\sum_{j=1}^{m}b_j=(1-t)\cdot 1+t\cdot 1=1. \tag{2.1.8}$$

Άρα, η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ είναι κυρτό σύνολο.

(ii) Εστω A ένα κυρτό σύνολο που περιέχει το S. Από την Πρόταση 2.1.2, το A περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς σημείων του A. Ειδικότερα, αφού $A \supseteq S$, το A περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς σημείων του S. Δηλαδή, $A \supseteq \mathrm{conv}(S)$. □

Ειδικές κλάσεις κυρτών συνόλων. Στη συνέχεια του μαθήματος θα ασχολούμαστε συχνά με τρεις σημαντικές κλάσεις κυρτών υποσυνόλων του Ευκλείδειου χώρου: τα κυρτά σώματα, τα πολύτοπα και τα πολύεδρα.

(α) Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ το οποίο έχει μη κενό εσωτερικό.

(β) Πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ είναι η κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου συνόλου S σημείων του $\mathbb{R}^n$.

(γ) Πολύεδρο στον $\mathbb{R}^n$ είναι μία «πεπερασμένη τομή ημιχώρων», δηλαδή ένα σύνολο της μορφής

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_i \rangle \leq \beta_i \text{ για } i = 1, \ldots, m\} \tag{2.1.9}$$

όπου $m \in \mathbb{N}$, $\theta_1, \ldots, \theta_m \in S^{n-1}$ και $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, κάθε πολύτοπο είναι πολύεδρο. Αντίστροφα, αν ένα πολύεδρο είναι φραγμένο σύνολο, τότε είναι πολύτοπο.

2.2 Το θεώρημα του Καραθεοδωρή

Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $\mathrm{conv}(S)$ η κυρτή του θήκη. Αν $z \in \mathrm{conv}(S)$ τότε το z γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός σημείων του S. Φαίνεται λογικό, τουλάχιστον στις δύο ή στις τρεις διαστάσεις, ότι μπορούμε να γράψουμε το z σαν κυρτό συνδυασμό «λίγων» σημείων του S, τα οποία φυσικά θα εξαρτώνται από το z. Αυτό είναι αλήθεια σε κάθε διάσταση: θα αποδείξουμε το εξής γενικό αποτέλεσμα του Καραθεοδωρή.

Θεώρημα 2.2.1 (Καραθεοδωρής, 1907). *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $z \in \mathrm{conv}(S)$ υπάρχουν $y_1, \ldots, y_{n+1} \in S$ και $t_i \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1$ ώστε*

$$z = t_1 y_1 + \cdots + t_{n+1} y_{n+1}. \tag{2.2.1}$$

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathrm{conv}(S)$. Από τον ορισμό της κυρτής θήκης, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_m \in S$ και $\alpha_i \geq 0$ με $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$ ώστε

$$z = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m. \tag{2.2.2}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_i > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Αν $m < n+1$ τότε, προσθέτοντας όρους της μορφής $0 \cdot y_1$, μπορούμε να γράψουμε το z σαν κυρτό συνδυασμό $n+1$ σημείων του S.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m > n+1$ και θα δείξουμε ότι μπορούμε να γράψουμε το z σαν κυρτό συνδυασμό λιγότερων από m σημείων του S. Επαναλαμβάνοντας αυτό το βήμα πεπερασμένες το πλήθος φορές, θα πάρουμε το ζητούμενο.

Θεωρούμε το ομογενές σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \cdots + \gamma_m &= 0 \\ \gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_m y_m &= 0. \end{aligned}$$

Αν για κάθε $i = 1, \ldots, m$ γράψουμε $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$, έχουμε τις $n+1$ εξισώσεις

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \cdots + \gamma_m &= 0 \\ \gamma_1 y_{11} + \cdots + \gamma_m y_{m1} &= 0 \\ \gamma_1 y_{12} + \cdots + \gamma_m y_{m2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \vdots \\ \gamma_1 y_{1n} + \cdots + \gamma_m y_{mn} &= 0. \end{aligned}$$

Το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων, άρα υπάρχει μη τετριμμένη λύση $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Από την $\gamma_1 + \cdots + \gamma_m = 0$ βλέπουμε ότι υπάρχουν γνήσια θετικοί και γνήσια αρνητικοί γ_i. Αφού το $\{i \leq m : \gamma_i > 0\}$ είναι μη κενό, υπάρχει $1 \leq i_0 \leq m$ ώστε

$$\frac{\alpha_{i_0}}{\gamma_{i_0}} = \tau = \min\left\{\frac{\alpha_i}{\gamma_i} : \gamma_i > 0\right\}. \tag{2.2.3}$$

Ορίζουμε

$$\beta_i = \alpha_i - \tau\gamma_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.2.4}$$

Από τον ορισμό του τ έπεται ότι $\beta_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$, και $\beta_{i_0} = 0$. Επιπλέον,

$$\beta_1 + \cdots + \beta_m = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_m) - \tau(\gamma_1 + \cdots + \gamma_m) = 1 \tag{2.2.5}$$

γιατί $\gamma_1 + \cdots + \gamma_m = 0$, και

$$\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m - \tau(\gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_m y_m) = z \tag{2.2.6}$$

γιατί $\gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_m y_m = 0$. Γράψαμε λοιπόν το z σαν κυρτό συνδυασμό:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i = \sum_{i \neq i_0} \beta_i y_i \tag{2.2.7}$$

$m - 1$ σημείων του S (μπορούμε να παραλείψουμε το y_{i_0} αφού $\beta_{i_0} = 0$). Συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε τελικά να γράψουμε το z σαν κυρτό συνδυασμό $n + 1$ (ή λιγότερων) σημείων του S. □

Μία χρήσιμη συνέπεια του θεωρήματος του Καραθεοδωρή είναι η εξής.

Πρόταση 2.2.2. *Αν S είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ είναι συμπαγές σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το *simplex*

$$\Delta = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_i \geq 0 \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n+1\right\}. \tag{2.2.8}$$

Το Δ είναι συμπαγές σύνολο, άρα το σύνολο $P := S \times \cdots \times S \times \Delta$ (όπου το S παίρνεται $n + 1$ φορές) είναι συμπαγές υποσύνολο (του $\mathbb{R}^{(n+1)n+(n+1)}$).

Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi : P \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(y_1, \ldots, y_{n+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1}. \tag{2.2.9}$$

Από το θεώρημα του Καραθεοδωρή, η εικόνα της Φ είναι ακριβώς ίση με $\mathrm{conv}(S)$ (γιατί;). Αφού η Φ είναι συνεχής και το P είναι συμπαγές, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathrm{conv}(S) = \Phi(P)$ είναι συμπαγές. □

2.3 Τα θεωρήματα των Radon και Helly

Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου αποδείχτηκε από τον Radon.

Θεώρημα 2.3.1 (Radon, 1921). *Έστω S ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που έχει τουλάχιστον $n+2$ σημεία. Τότε, υπάρχουν ξένα υποσύνολα R και B του S ώστε*

$$\mathrm{conv}(R)\cap \mathrm{conv}(B)\neq \emptyset. \tag{2.3.1}$$

Σημείωση. Όπως θα φανεί και από την απόδειξη, μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $R\cup B=S$. Άλλωστε, αν βρούμε R και B που ικανοποιούν το συμπέρασμα και αν $V=S\setminus (R\cup B)\neq\emptyset$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τα $R_1=R\cup V$ και B: έχουμε $R_1\cap B=\emptyset$, $R_1\cup B=S$ και

$$\mathrm{conv}(R_1)\cap \mathrm{conv}(B)\supseteq \mathrm{conv}(R)\cap \mathrm{conv}(B)\neq\emptyset.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχουν $m\geq n+2$ και σημεία $v_1,\ldots,v_m\in S$ τα οποία είναι διαφορετικά ανά δύο. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned}\gamma_1+\cdots+\gamma_m &= 0\\ \gamma_1v_1+\cdots+\gamma_mv_m &= 0\end{aligned}$$

με αγνώστους τους $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$, το οποίο χρησιμοποιήσαμε και στην απόδειξη του θεωρήματος του Καραθεοδωρή. Αφού το πλήθος $m\geq n+2$ των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος $n+1$ των εξισώσεων, υπάρχει μη τετριμμένη λύση του συστήματος. Ορίζουμε

$$R=\{v_i:\ \gamma_i>0\}\quad \text{και}\quad B=\{v_i:\ \gamma_i\leq 0\}. \tag{2.3.2}$$

Από τον ορισμό των R και B έχουμε $R\cap B=\emptyset$.

Θέτουμε $\beta=\sum\limits_{\{i:\gamma_i>0\}}\gamma_i>0$. Αφού $\gamma_1+\cdots+\gamma_m=0$, έχουμε

$$\sum_{\{i:\gamma_i\leq 0\}}(-\gamma_i)=\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\gamma_i=\beta. \tag{2.3.3}$$

Από την $\gamma_1v_1+\cdots+\gamma_mv_m=0$ παίρνουμε

$$\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\gamma_iv_i=\sum_{\{i:\gamma_i\leq 0\}}(-\gamma_i)v_i. \tag{2.3.4}$$

Διαιρούμε με β και ορίζουμε

$$v=\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\frac{\gamma_i}{\beta}v_i=\sum_{\{i:\gamma_i\leq 0\}}\frac{-\gamma_i}{\beta}v_i. \tag{2.3.5}$$

Από την (2.3.3) είναι φανερό ότι το v είναι κυρτός συνδυασμός σημείων του R και, ταυτόχρονα, κυρτός συνδυασμός σημείων του B. Δηλαδή, $v\in\mathrm{conv}(R)\cap\mathrm{conv}(B)$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα αποδείχτηκε από τον Helly το 1913. Χρησιμοποιώντας το δικό του θεώρημα, ο Radon έδωσε (το 1921) την απόδειξη που παρουσιάζουμε παρακάτω.

Θεώρημα 2.3.2 (Helly). *Έστω $m \geq n+1$ και $\{A_1, \dots, A_m\}$ μία πεπερασμένη οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε $n+1$ από τα A_i έχουν μη κενή τομή: αν $i_1, \dots, i_{n+1}$ είναι δείκτες από το $\{1, \dots, m\}$, τότε*

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset. \tag{2.3.6}$$

Τότε, η τομή όλων των A_i είναι μη κενή:

$$A_1 \cap \cdots \cap A_m \neq \emptyset. \tag{2.3.7}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το πλήθος m των συνόλων. Αν $m = n+1$ τότε το συμπέρασμα συμπίπτει με την υπόθεση.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m > n+1$. Από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε $i = 1, \dots, m$, η τομή $A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m$ είναι μη κενή. (Πράγματι, η οικογένεια $\{A_j : j \neq i\}$ ικανοποιεί την (2.3.6) και αποτελείται από λιγότερα από m σύνολα.) Μπορούμε λοιπόν, για κάθε $i = 1, \dots, m$, να βρούμε

$$p_i \in A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m. \tag{2.3.8}$$

Έτσι, έχουμε $m > n+1$ σημεία $p_1, \dots, p_m$ με την ιδιότητα: το p_i ανήκει σε όλα τα σύνολα A_j εκτός ίσως από το A_i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Υπάρχουν δείκτες $i \neq s$ ώστε $p_i = p_s = p$ (δύο από τα p_i συμπίπτουν). Τότε, το p ανήκει σε όλα τα A_j: αφού $p = p_i$, το p ανήκει σε όλα τα A_j εκτός ίσως από το A_i, αφού όμως $p = p_s$, το p ανήκει και στο A_i. Έπεται ότι

$$p \in A_1 \cap \cdots \cap A_m, \tag{2.3.9}$$

δηλαδή ισχύει η (2.3.7).

(β) Τα $p_1, \dots, p_m$ είναι διαφορετικά ανά δύο. Αφού $m \geq n+2$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Radon. Υπάρχουν $I, J \subset \{1, \dots, m\}$ με $I \cap J = \emptyset$ ώστε αν θέσουμε $R = \{p_i : i \in I\}$ και $B = \{p_j : j \in J\}$ τότε υπάρχει κάποιο σημείο

$$q \in \mathrm{conv}(R) \cap \mathrm{conv}(B). \tag{2.3.10}$$

Ισχυριζόμαστε ότι το q ανήκει σε όλα τα A_i. Πράγματι, από τον τρόπο επιλογής των p_i έχουμε

$$R \subset \bigcap \{A_s : s \notin I\}. \tag{2.3.11}$$

Το σύνολο δεξιά είναι κυρτό, ως τομή κυρτών συνόλων, άρα

$$\mathrm{conv}(R) \subset \bigcap \{A_s : s \notin I\}. \tag{2.3.12}$$

Όμοια,

$$\mathrm{conv}(B) \subset \bigcap \{A_s : s \notin J\}. \tag{2.3.13}$$

Αφού $q \in \mathrm{conv}(R) \cap \mathrm{conv}(B)$, συμπεραίνουμε ότι

$$q \in \bigcap \{A_s : s \notin I\} \quad \text{και} \quad q \in \bigcap \{A_s : s \notin J\}. \tag{2.3.14}$$

Αφού $I \cap J = \emptyset$, για κάθε $s \in \{1, \dots, m\}$ έχουμε «είτε $s \notin I$ ή $s \notin J$». Από την (2.3.14) έπεται ότι $q \in A_1 \cap \cdots \cap A_m$, άρα $A_1 \cap \cdots \cap A_m \neq \emptyset$. □

Το θεώρημα του Helly δεν ισχύει για άπειρες οικογένειες κυρτών συνόλων. Για παράδειγμα θεωρήστε τα σύνολα $A_n = [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ ή τα σύνολα $B_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει όμως, αν κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι τα δοθέντα κυρτά σύνολα είναι συμπαγή.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω* $\{A_i : i \in I\}$ $(|I| \geq n+1)$ *μία ενδεχομένως άπειρη οικογένεια συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}^n$. *Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε* $n+1$ *από τα* A_i *έχουν μη κενή τομή: αν* $i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$, *τότε*

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset. \tag{2.3.15}$$

Τότε, η τομή όλων των A_i *είναι μη κενή:*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset. \tag{2.3.16}$$

Απόδειξη. Αν J είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του I με πληθάριθμο $|J| \geq n+1$ τότε η οικογένεια $\{A_j : j \in J\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.2, άρα έχει μη κενή τομή. Αν πάλι $|J| < n+1$ τότε οι υποθέσεις μας εξασφαλίζουν ότι η οικογένεια $\{A_j : j \in J\}$ έχει μη κενή τομή. Δηλαδή, για κάθε πεπερασμένο $J \subseteq I$ ισχύει

$$\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset. \tag{2.3.17}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \emptyset$. Τότε, αν σταθεροποιήσουμε $i \in I$, έχουμε

$$A_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} A_j^c. \tag{2.3.18}$$

Τα σύνολα A_j^c, $j \neq i$, σχηματίζουν ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς συνόλου A_i. Άρα, υπάρχει πεπερασμένο $F \subseteq I \setminus \{i\}$ ώστε

$$A_i \subseteq \bigcup_{j \in F} A_j^c. \tag{2.3.19}$$

Τότε, το $J = F \cup \{i\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο και

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset. \tag{2.3.20}$$

Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την (2.3.17). Άρα, $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. □

Αν κοιτάξετε προσεκτικά την απόδειξη της Πρότασης 2.3.3 θα παρατηρήσετε ότι χρησιμοποιήσαμε τη συμπάγεια *ενός μόνο* από τα σύνολα A_i και το γεγονός ότι *όλα* τα A_i ήταν κλειστά. Με άλλα λόγια, έχουμε δείξει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.3.4. *Έστω* $\{A_i : i \in I\}$ $(|I| \geq n+1)$ *μία ενδεχομένως άπειρη οικογένεια κλειστών κυρτών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}^n$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $i_* \in I$ *ώστε το* A_{i_*} *να είναι συμπαγές και ότι οποιαδήποτε* $n+1$ *από τα* A_i *έχουν μη κενή τομή. Τότε, η τομή όλων των* A_i *είναι μη κενή.* □

2.4 Εφαρμογές στη συνδυαστική γεωμετρία

Το θεώρημα του Helly έχει πολλές εφαρμογές στη συνδυαστική γεωμετρία. Θα μελετήσουμε κάποιες από αυτές σε αυτή την παράγραφο και στις ασκήσεις.

Το θεώρημα του Kirchberger. Το πρώτο μας παράδειγμα είναι το θεώρημα του Kirchberger (αποδείχτηκε το 1903, πριν από το θεώρημα του Helly). Για να το διατυπώσουμε χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό: αν $A, B \subset \mathbb{R}^n$, λέμε ότι το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \alpha\}$ (όπου $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$) *διαχωρίζει γνήσια* τα A και B αν

$$\langle x, y\rangle < \alpha \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } \langle x, y\rangle > \alpha \text{ για κάθε } x \in B.$$

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω R και B δύο πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $S \subset R \cup B$ με πληθάριθμο $|S| \leq n+2$ υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει γνήσια τα $S \cap R$ και $S \cap B$. Τότε, υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει γνήσια τα R και B.*

Απόδειξη. Ταυτίζουμε το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \alpha\}$ με το σημείο $(y,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$.

Για κάθε σημείο $r \in R$ ορίζουμε ένα σύνολο $A_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$ θέτοντας

$$A_r = \{(y,\alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle r, y\rangle < \alpha\} \tag{2.4.1}$$

και για κάθε σημείο $b \in B$ ορίζουμε ένα σύνολο $A_b \subset \mathbb{R}^{n+1}$ θέτοντας

$$A_b = \{(y,\alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : y\langle b, y\rangle > \alpha\}. \tag{2.4.2}$$

Από τον ορισμό προκύπτει εύκολα ότι τα σύνολα A_r και A_b είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Αφού τα σύνολα A_r και A_b είναι ανοικτά, για κάθε $S \subseteq R \cup B$ έχουμε ότι η τομή

$$\left(\bigcap_{r\in S\cap R} A_r\right) \bigcap \left(\bigcap_{b\in S\cap B} A_b\right) \tag{2.4.3}$$

είναι ανοικτό σύνολο, άρα είναι μη κενή αν και μόνο αν περιέχει σημείο (y,α) με $y \neq 0$. Δηλαδή, αν και μόνο αν υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει γνήσια τα $S \cap R$ και $S \cap B$.

Από την υπόθεση, για κάθε $S \subseteq R \cup B$ με $|S| \leq n+2$ ισχύει

$$\left(\bigcap_{r\in S\cap R} A_r\right) \bigcap \left(\bigcap_{b\in S\cap B} A_b\right) \neq \emptyset. \tag{2.4.4}$$

(Πράγματι, η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει $(y,\alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $y \neq 0$ ώστε $\langle x, y\rangle < \alpha$ για κάθε $x \in R \cap S$ και $\langle x, y\rangle > \alpha$ για κάθε $x \in B \cap S$. Δηλαδή, ισχύει η (2.4.4).)

Τότε, το θεώρημα του Helly (παρατηρήστε ότι το εφαρμόζουμε στον $\mathbb{R}^{n+1}$) μας δίνει

$$\left(\bigcap_{r\in R} A_r\right) \bigcap \left(\bigcap_{b\in B} A_b\right) \neq \emptyset. \tag{2.4.5}$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ακριβώς ότι τα R και B διαχωρίζονται γνήσια από κάποιο υπερεπίπεδο. □

Το «κέντρο» μίας κατανομής σημείων. Αν $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle = \alpha\}$ είναι ένα υπερεπίπεδο, θεωρούμε τους ανοικτούς ημιχώρους

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle > \alpha\} \quad \text{και} \quad H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle < \alpha\} \tag{2.4.6}$$

και τους κλειστούς ημιχώρους

$$\overline{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle \geq \alpha\} \quad \text{και} \quad \overline{H}_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle \leq \alpha\} \tag{2.4.7}$$

που ορίζει το H.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$ έχει ένα «κέντρο», με την εξής έννοια: υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα «κάθε ημίχωρος που περιέχει το y περιέχει ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό των σημείων του S».

Θεώρημα 2.4.2 (Radon, 1947). *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει σημείο $y \in \mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό ημίχωρο F που περιέχει το y έχουμε*

$$\frac{|F \cap S|}{|S|} \geq \frac{1}{n+1}. \tag{2.4.8}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι αρκεί να βρούμε $y \in \mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ανοικτό ημίχωρο G που ικανοποιεί την

$$\frac{|G \cap S|}{|S|} > \frac{n}{n+1} \tag{2.4.9}$$

ισχύει $y \in G$. (Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει $y \in \mathbb{R}^n$ με αυτή την ιδιότητα. Έστω F κλειστός ημίχωρος με $y \in F$. Αν $\frac{|F\cap S|}{|S|} < \frac{1}{n+1}$ τότε ο ανοικτός ημίχωρος $G = \mathbb{R}^n \setminus F$ ικανοποιεί την (2.4.9), άρα $y \in G$. Έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο, αφού $y \in F \cap G = \emptyset$. Συνεπώς, $\frac{|F\cap S|}{|S|} \geq \frac{1}{n+1}$.)

Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια $\mathcal{G}$ όλων των ανοικτών ημιχώρων G που ικανοποιούν την (2.4.9). Αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι

$$\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G \neq \emptyset. \tag{2.4.10}$$

Για κάθε $G \in \mathcal{G}$ θέτουμε $C_G = \mathrm{conv}(G \cap S)$. Η οικογένεια $\mathcal{C} = \{C_G : G \in \mathcal{G}\}$ αποτελείται από συμπαγή κυρτά σύνολα. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $G_1, \ldots, G_{n+1} \in \mathcal{G}$ ισχύει

$$S \cap C_{G_1} \cap \cdots \cap C_{G_{n+1}} \neq \emptyset. \tag{2.4.11}$$

Πράγματι, καθένα από τα C_{G_i} περιέχει περισσότερα από $\frac{n}{n+1}|S|$ σημεία του S, άρα

$$|(C_{G_1}^c \cup \cdots \cup C_{G_{n+1}}^c) \cap S| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |C_{G_i}^c \cap S| < \sum_{i=1}^{n+1} \frac{|S|}{n+1} = |S|. \tag{2.4.12}$$

Συνεπώς, οποιαδήποτε $n+1$ σύνολα της $\mathcal{C}$ έχουν μη κενή τομή. Από το θεώρημα του Helly έπεται ότι $\bigcap\limits_{G\in\mathcal{G}} C_G \neq \emptyset$.

Τότε, αν θεωρήσουμε τυχόν $y \in \bigcap\limits_{G\in\mathcal{G}} C_G$ έχουμε $y \in C_G \subseteq G$ για κάθε $G \in \mathcal{G}$. □

Το Θεώρημα 2.4.2 γενικεύεται χωρίς δυσκολία στο πλαίσιο των Borel μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Μπορείτε να σκεφτόσαστε τα εξής δύο παραδείγματα:

1. *Το μέτρο αρίθμησης.* Έστω X ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πληθάριθμο $|S| = m$. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ θέτουμε
$$\mu(A) = \frac{|A \cap S|}{m}.$$
Αυτό είναι το πλαίσιο του Θεωρήματος 2.4.2.

2. *Ολοκληρώσιμη πυκνότητα.* Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$. Για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ θέτουμε
$$\mu(A) = \int_A f(x)\, dx.$$

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει σημείο $y \in \mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό ημίχωρο G που περιέχει το y έχουμε*

$$\mu(G) \geq \frac{1}{n+1}. \tag{2.4.8}$$

Απόδειξη. Αν G είναι ένας κλειστός ημίχωρος στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε G^c για τον συμπληρωματικό ανοικτό ημίχωρο. Έστω $\mathcal{S}$ η κλάση όλων των κλειστών ημιχώρων G για τους οποίους $\mu(G^c) < \frac{1}{n+1}$. Παρατηρούμε ότι αν $G_1, \ldots, G_{n+1} \in \mathcal{S}$, τότε

$$\mu(G_1^c \cup \cdots \cup G_{n+1}^c) < \frac{n+1}{n+1} = 1, \tag{2.4.9}$$

δηλαδή

$$G_1 \cap \cdots \cap G_{n+1} \neq \emptyset. \tag{2.4.10}$$

Από το θεώρημα του Helly έπεται ότι κάθε πεπερασμένη οικογένεια $\{G_i : i \in I\} \subset \mathcal{S}$ έχει μη κενή τομή.

Μπορούμε να βρούμε πεπερασμένους το πλήθος κλειστούς ημιχώρους $G_1, \ldots, G_m \subset \mathbb{R}^n$ των οποίων η τομή $F = G_1 \cap \cdots \cap G_m$ είναι φραγμένη, άρα συμπαγής. Μεγαλώνοντας αυτούς τους ημιχώρους (με μεταφορές) μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουν μέτρο μεγαλύτερο από $\frac{n}{n+1}$, δηλαδή ότι $G_1, \ldots, G_m \in \mathcal{S}$. Τότε, η οικογένεια

$$\{F \cap G : G \in \mathcal{S}\} \tag{2.4.11}$$

αποτελείται από συμπαγή σύνολα, και κάθε πεπερασμένη υποοικογένεια της έχει μη κενή τομή. Από την Πρόταση 2.3.3 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα: $y \in G$ για κάθε $G \in \mathcal{S}$.

Έστω H ένας ανοικτός ημίχωρος που περιέχει το y. Το συμπλήρωμα του H είναι ένας κλειστός ημίχωρος G που δεν περιέχει το y, άρα δεν ανήκει στην $\mathcal{S}$. Τότε, $\mu(H) \geq \frac{1}{n+1}$.

Αν G είναι ένας κλειστός ημίχωρος που περιέχει το y, υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{H_m\}$ ανοικτών ημιχώρων με

$$G = \bigcap_{m=1}^{\infty} H_m. \tag{2.4.12}$$

Τότε, $y \in H_m$ για κάθε m, άρα $\mu(H_m) \geq \frac{1}{n+1}$ για κάθε m. Έπεται ότι

$$\mu(G) = \lim_{m\to\infty} \mu(H_m) \geq \frac{1}{n+1}, \tag{2.4.13}$$

κι αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

2.5 Γενικεύσεις των τριών θεωρημάτων

2.5.1 Το έγχρωμο θεώρημα Καραθεοδωρή

Το θεώρημα αυτής της παραγράφου γενικεύει το θεώρημα του Καραθεοδωρή: παίρνοντας $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1}$ βλέπουμε ότι αν S είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $0 \in \mathrm{conv}(S)$ τότε υπάρχουν $v_1 \in S_1, \ldots, v_{n+1} \in S$ ώστε $0 \in \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\})$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το θεώρημα του Καραθεοδωρή (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 2.5.1 (Bárány, 1982). *Έστω $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$ υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i = 1, 2, ..., n+1$,*

$$0 \in \mathrm{conv}(S_i). \tag{2.5.1}$$

Τότε, υπάρχουν $v_1 \in S_1, \ldots, v_{n+1} \in S_{n+1}$ ώστε

$$0 \in \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}). \tag{2.5.2}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε S_i είναι πεπερασμένο σύνολο: από την υπόθεση έχουμε ότι, για κάθε $i = 1,\dots,n+1$, $0 \in \mathrm{conv}(S_i)$. Από τον ορισμό της κυρτής θήκης, υπάρχουν πεπερασμένα $S_i' \subseteq S_i$ ώστε $0 \in \mathrm{conv}(S_i')$, $i = 1,\dots,n+1$. Αν δείξουμε ότι υπάρχουν $v_1 \in S_1', \dots, v_{n+1} \in S_{n+1}'$ ώστε $0 \in \mathrm{conv}(\{v_1,\dots,v_{n+1}\})$, τότε έπεται το ζητούμενο, διότι $v_i \in S_i' \subseteq S_i$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι κάθε S_i είναι πεπερασμένο σύνολο και ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε, για κάθε επιλογή σημείων $a_i \in S_i$ ισχύει $d(0,\{a_1,...,a_{n+1}\}) > 0$. Αφού τα S_i είναι πεπερασμένα σύνολα, υπάρχει επιλογή σημείων $z_i \in S_i$ ώστε η απόσταση $d(0,\{z_1,...,z_{n+1}\})$ να είναι θετική και η μικρότερη δυνατή.

Θέτουμε $T = \mathrm{conv}\{z_1,...,z_{n+1}\}$ και $d := d(0,T)$. Το T είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $y \in T$ ώστε

$$d(0,T) = \|y\|_2. \tag{2.5.3}$$

Λήμμα 2.5.2. *Αν θ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του y, τότε*

$$T \subset \overline{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,\theta\rangle \geq \|y\|_2\}. \tag{2.5.4}$$

Απόδειξη του λήμματος. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{z_1,...,z_{n+1}\} \subset \overline{H}_+ \tag{2.5.5}$$

και το λήμμα έπεται από τον ορισμό της κυρτής θήκης. Έστω $z \in \{z_1,...,z_{n+1}\}$. Για κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει η ανισότητα

$$\|y\|_2^2 - 2t\langle y, y-z\rangle + t^2\|z-y\|_2^2 = \|y+t(z-y)\|_2^2 \geq \|y\|_2^2, \tag{2.5.6}$$

άρα

$$\frac{t}{2}\|z-y\|_2^2 \geq \langle y, y-z\rangle. \tag{2.5.7}$$

Αφήνοντας το $t \to 0^+$, παίρνουμε $\langle z,y\rangle \geq \langle y,y\rangle = \|y\|_2^2$, δηλαδή

$$\langle z,\theta\rangle \geq \|y\|_2. \tag{2.5.8}$$

□

Συνέχεια της απόδειξης. Θέτουμε $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,\theta\rangle = \|y\|_2\}$ και $J_H = \{z_1,\dots,z_{n+1}\} \cap H$. Τότε,

$$T \cap H = \mathrm{conv}(J_H) \subseteq H \tag{2.5.9}$$

(άσκηση). Αφού $\dim H = n-1$, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Καραθεοδωρή για το $y \in T \cap H$ έχουμε ότι γράφεται ως κυρτός συνδυασμός το πολύ n σημείων από τα z_i. Δηλαδή, υπάρχει $j \in \{1,2,...,n+1\}$ ώστε

$$y \in \mathrm{conv}(\{z_i : i \neq j\}). \tag{2.5.10}$$

Όμως,

$$0 \in \mathrm{conv}(S_j) \tag{2.5.11}$$

και επιπλέον

$$0 \in H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,\theta\rangle < \|y\|_2\}. \tag{2.5.12}$$

Άρα, υπάρχει $w_j \in S_j$ με $w_s \in H_-$ (πράγματι, αν είχαμε $S_j \subset \overline{H}_+$ τότε θα είχαμε $\mathrm{conv}(S_j) \subset \overline{H}_+$, άρα $0 \in \overline{H}_+$, άτοπο).

Τώρα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $T_1 = \mathrm{conv}\{w_j, z_i : i \neq j\}$, ισχύει

$$d(0,T_1) < d(0,T). \tag{2.5.13}$$

Πράγματι, για κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει $d(0,T_1) \leq \|y + t(w_j - y)\|_2$, άρα

$$d^2(0,T_1) \leq d^2(0,T) - 2t\langle y, y - w_j\rangle + t^2\|y - w_j\|_2^2. \tag{2.5.14}$$

Θέτουμε

$$\alpha = \|y - w_j\|_2^2 > 0 \tag{2.5.15}$$

και

$$\beta = \langle y, y - w_j\rangle = \|y\|_2(\|y\|_2 - \langle w_j, \theta\rangle) > 0. \tag{2.5.16}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $w_j \in H_-$. Αν λοιπόν επιλέξουμε $0 < t < \min\{1, \frac{2\beta}{\alpha}\}$, από την (2.5.14) παίρνουμε

$$d^2(0,T_1) \leq d^2(0,T) - 2t\beta + t^2\alpha < d^2(0,T). \tag{2.5.17}$$

Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο. □

2.5.2 Το κλασματικό θεώρημα Helly

Έστω $m \geq n+1$ και $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ μία πεπερασμένη οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Το θεώρημα του Helly μας εξασφαλίζει ότι αν κάθε υποοικογένεια $n+1$ συνόλων από την C έχει μη κενή τομή, τότε $C_1 \cap \cdots \cap C_m \neq \emptyset$. Στο επόμενο «κλασματικό θεώρημα Helly» εξετάζεται η περίπτωση όπου ένα ποσοστό των υποοικογενειών μεγέθους $n+1$ έχει μη κενή τομή.

Θεώρημα 2.5.3 (Katschalski--Liu, 1979). *Για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει σταθερά $\beta = \beta(n,\alpha) > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα.*

> *Έστω $m \geq n+1$ και $C_1, \ldots, C_m$ κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$. Αν τουλάχιστον $\alpha\binom{m}{n+1}$ υποσύνολα $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ με $|I| = n+1$ ικανοποιούν την $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ με $|J| \geq \beta m$ ώστε $\bigcap_{j\in J} C_j \neq \emptyset$.*

Σημείωση. Η καλύτερη δυνατή εξάρτηση του β από τα n και α είναι $\beta = 1 - (1-\alpha)^{1/(n+1)}$. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε εδώ δίνει την ασθενέστερη εκτίμηση $\beta \geq \frac{\alpha}{n+1}$.

Απόδειξη. Για κάθε $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ συμβολίζουμε με C_I το σύνολο $\bigcap_{i\in I} C_i$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι κάθε C_i είναι συμπαγές (και μάλιστα πολύτοπο). Πράγματι, αν μας δοθούν τυχόντα κυρτά σύνολα $C_1, \ldots, C_m$ τότε, για κάθε I με $|I| = n+1$ και $C_I \neq \emptyset$, επιλέγουμε τυχόν σημείο $x_I \in C_I$ και, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, ορίζουμε $C_i' = \mathrm{conv}(\{x_I : C_I \neq \emptyset, i \in I\})$. Παρατηρήστε ότι κάθε C_i' είναι κυρτό, συμπαγές και περιέχεται στο C_i. Επίσης, αν για κάποιο σύνολο δεικτών I με $|I| = n+1$ ισχύει $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, τότε $x_I \in \bigcap_{i\in I} C_i'$ δηλαδή, $\bigcap_{i\in I} C_i' \neq \emptyset$.

Συνεπώς, το πλήθος των $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ με $|I| = n+1$ που ικανοποιούν την $\bigcap_{i\in I} C_i' \neq \emptyset$ είναι ίσο με το πλήθος των $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ με $|I| = n+1$ που ικανοποιούν την $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$. Παίρνοντας υπ' όψιν και το γεγονός ότι $C_i' \subseteq C_i$, βλεπουμε ότι, αν το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει για τα C_i', τότε ισχύει και για τα C_i.

Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, υποθέτουμε ότι τα σύνολα C_i, καθώς και όλα τα μή κενά C_I, είναι κυρτά και συμπαγή. Θεωρούμε τη *λεξικογραφική διάταξη* $\leq$ στον $\mathbb{R}^n$: $(t_1,\dots,t_n) < (r_1,\dots,r_n)$ αν υπάρχει $1 \leq k \leq n$ ώστε $t_i = r_i$ για κάθε $i < k$ και $t_k < r_k$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ περιέχει μοναδικό «λεξικογραφικά ελάχιστο» σημείο (άσκηση).

Λήμμα 2.5.4. *Έστω $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ σύνολο δεικτών ώστε $|I| = n+1$ και $C_I \neq \emptyset$. Αν v_I είναι το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο του C_I, τότε υπάρχει $J \subseteq I$ με $|J| = n$ ώστε το v_I να είναι το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο του C_J.*

Απόδειξη του λήμματος. Ορίζουμε $A = \{x \in \mathbb{R}^n : x < v_I\}$. Το σύνολο A είναι κυρτό και, από τον ορισμό του v_I, έχουμε $A \cap C_I = \emptyset$. Αφού η οικογένεια $A \cap \{C_i : i \in I\}$ έχει κενή τομή, το θεώρημα του Helly μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει υποοικογένεια $n+1$ συνόλων αυτής της οικογένειας που έχει κενή τομή. Το A πρέπει να ανήκει σε αυτή την υποοικογένεια, διότι όλα τα υπόλοιπα σύνολα έχουν κοινό σημείο, το v_I. Άρα, υπάρχει $J \subseteq I$ με $|J| = n$ ώστε η οικογένεια $A \cap \{C_j : j \in J\}$ να έχει κενή τομή. Τώρα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το v_I είναι το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο του C_J. Πράγματι, $v_J \leq v_I$ διότι $C_I \subseteq C_J$ και $v_I \leq v_J$ διότι $A \cap C_J = \emptyset$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). □

Απόδειξη του θεωρήματος. Έστω $\mathcal{U}$ η οικογένεια όλων των $\alpha\binom{m}{n+1}$ συνόλων δεικτών I για τα οποία $|I| = n+1$ και $C_I \neq \emptyset$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα, για κάθε $I \in \mathcal{U}$ σταθεροποιούμε $J = J(I) \subseteq I$ με $|J| = n$ ώστε το C_J να έχει το ίδιο λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο με το C_I.

Το πλήθος των διαφορετικών n-συνολων $J \subseteq \{1,\dots,m\}$ είναι ίσο με $\binom{m}{n}$. Υπάρχει λοιπόν κάποιο J_0 με $|J_0| = n$ ώστε $J_0 = J(I)$ για τουλάχιστον

$$\frac{\alpha\binom{m}{n+1}}{\binom{m}{n}} = \alpha\frac{m-n}{n+1} \tag{2.5.18}$$

διαφορετικά σύνολα δεικτών $I \in \mathcal{U}$. Τότε, το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο v_{J_0} του C_{J_0} ανήκει σε όλα αυτά τα C_I, δηλαδή σε τουλάχιστον

$$n + \alpha\frac{m-n}{n+1} > \alpha\frac{m}{n+1} \tag{2.5.19}$$

από τα σύνολα C_i (ανήκει στα n σύνολα C_j, $j \in J_0$, και σε ένα επιπλέον C_i για κάθε I με $J_0 = J(I)$, διαφορετικό κάθε φορά). Συνεπώς, το συμπέρασμα ισχύει με $\beta = \frac{\alpha}{n+1}$. □

2.5.3 Το θεώρημα του Tverberg

Το θεώρημα του Radon εξασφαλίζει ότι κάθε σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ με $n+2$ σημεία έχει δύο ξένα υποσύνολα που οι κυρτές τους θήκες έχουν κοινό σημείο. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν για σύνολα με περισσότερα στοιχεία μπορούμε πάντα να βρίσκουμε πολλά ξένα υποσύνολα που οι κυρτές τους θήκες έχουν κοινό σημείο.

Η ακριβής διατύπωση του προβλήματος είναι η εξής. Έστω $T(n,r)$ ο μικρότερος φυσικός m με την ακόλουθή ιδιότητα: αν $A \subset \mathbb{R}^n$ και $|A| = m$, τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1,\dots,A_r \subset A$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{conv}(A_j) \neq \emptyset. \tag{2.5.20}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Radon έχουμε

$$T(n,2)=n+2. \tag{2.5.21}$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$T(n,r_1r_2)\leq T(n,r_1)T(n,r_2) \tag{2.5.22}$$

για κάθε $r_1,r_2\geq 2$ (άσκηση). Συνεπώς, $T(n,r)<\infty$ για κάθε $r\geq 2$. Το φράγμα που προκύπτει είναι ασθενές: για παράδειγμα, με εφαρμογή αυτής της παρατήρησης παίρνουμε $T(n,2^k)\leq (n+2)^k$. Το θεώρημα του Tverberg δίνει τη βέλτιστη εκτίμηση για τον $T(n,r)$.

Θεώρημα 2.5.5 (Tverberg, 1966). *Έστω $n,r\geq 2$. Για κάθε $A\subset\mathbb{R}^n$ με $|A|=(r-1)(n+1)+1$ μπορούμε να βρούμε ξένα ανά δύο $A_1,\dots,A_r\subset A$ ώστε $\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{conv}(A_j)\neq\emptyset$.*

Σημείωση. Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέλτιστο. Δηλαδή,

$$T(n,r)=(r-1)(n+1)+1. \tag{2.5.23}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την έννοια του *κυρτού κώνου* που παράγεται από ένα $X\subseteq\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 2.5.6 (κυρτός κώνος). *Έστω $X\subseteq\mathbb{R}^d$. Ο **κυρτός κώνος** που παράγεται από το X είναι το σύνολο $\mathrm{cone}(X)$ όλων των γραμμικών συνδυασμών σημείων του X με μη αρνητικούς συντελεστές. Δηλαδή,*

$$\mathrm{cone}(X)=\left\{\sum_{i=1}^{m}t_ix_i : m\in\mathbb{N}, t_i\geq 0, x_i\in X\right\}. \tag{2.5.24}$$

Παρατηρήστε ότι ο κώνος $\mathrm{cone}(X)$ είναι η ένωση όλων των ημιευθειών που ξεκινούν από το 0 και περνούν από κάποιο σημείο της κυρτής θήκης $\mathrm{conv}(X)$ του X.

Πρόταση 2.5.7 (θεώρημα του Tverberg για κώνους). *Έστω $A\subset\mathbb{R}^{n+1}$ με $|A|=(r-1)(n+1)+1$. Αν $0\notin\mathrm{conv}(A)$ τότε υπάρχουν r μη κενά, ξένα ανά δύο υποσύνολα $A_1,\dots,A_r$ του A ώστε*

$$\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{cone}(A_j)\neq\{0\}. \tag{2.5.25}$$

Απόδειξη της πρότασης. Θέτουμε $N=(r-1)(n+1)$. Ορίζουμε γραμμικές απεικονίσεις $\phi_j:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^N$ $(j=1,\dots,r)$ ως εξής: χωρίζουμε τις N συντεταγμένες του $\mathbb{R}^N$ σε $r-1$ ομάδες των $n+1$ συντεταγμένων – συμβολικά, $u=(*\mid *\mid *\mid\cdots\mid *\mid *)$ – και ορίζουμε

$$\begin{array}{rcl}
\phi_1(x) &=& (\,x\mid 0\mid 0\mid\cdots\mid 0\mid 0)\\
\phi_2(x) &=& (\,0\mid x\mid 0\mid\cdots\mid 0\mid 0)\\
\cdots && \cdots\\
\phi_{r-2}(x) &=& (\,0\mid 0\mid 0\mid\cdots\mid x\mid 0)\\
\phi_{r-1}(x) &=& (\,0\mid 0\mid 0\mid\cdots\mid 0\mid x)\\
\phi_r(x) &=& (-x\mid -x\mid -x\mid\cdots\mid -x\mid -x).
\end{array}$$

Η **βασική ιδιότητα** των ϕ_j είναι η εξής: αν $u_1,\dots,u_r\in\mathbb{R}^{n+1}$, τότε

$$\sum_{j=1}^{r}\phi_j(u_j)=0 \text{ αν και μόνο αν } u_1=u_2=\cdots=u_r. \tag{2.5.26}$$

Αυτό είναι φανερό, αφού

$$\sum_{j=1}^{r}\phi_j(u_j)=(u_1-u_r\mid u_2-u_r\mid\cdots\mid u_{r-1}-u_r). \tag{2.5.27}$$

Γράφουμε $A=\{a_1,\dots,a_{N+1}\}$ και ορίζουμε

$$M=\phi_1(A)\cup\phi_2(A)\cup\cdots\cup\phi_r(A). \tag{2.5.28}$$

Για κάθε $i=1,\dots,N+1$ θεωρούμε το σύνολο

$$M_i=\{\phi_1(a_i),\phi_2(a_i),\dots,\phi_r(a_i)\}. \tag{2.5.29}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των στοιχείων του M_i είναι ίσο με

$$\sum_{j=1}^{r}\phi_j(a_i)=0, \tag{2.5.30}$$

άρα

$$0\in\mathrm{conv}(M_i),\qquad i=1,\dots,N+1. \tag{2.5.31}$$

Από το **έγχρωμο θεώρημα του Καραθεοδωρή**, υπάρχουν $v_i=\phi_{f(i)}(a_i)\in M_i$, $i=1,\dots,N+1$, ώστε $0\in\mathrm{conv}(\{v_1,\dots,v_{N+1}\})$. Με άλλα λόγια, υπάρχουν $t_i\geq 0$ με $\sum_{i=1}^{N+1}t_i=1$, ώστε

$$\sum_{i=1}^{N+1}t_i\phi_{f(i)}(a_i)=0. \tag{2.5.32}$$

Παρατηρήστε ότι κάθε $f(i)\in\{1,\dots,r\}$. Για κάθε $j=1,\dots,r$ ορίζουμε

$$I_j=\{1\leq i\leq N+1: f(i)=j\}\ \text{και}\ A_j=\{a_j: j\in I_j\}. \tag{2.5.33}$$

Πρατηρήστε ότι τα $A_1,\dots,A_r$ είναι ξένα. Τότε, η (2.5.32) γράφεται ως εξής:

$$0=\sum_{i=1}^{N+1}t_i\phi_{f(i)}(a_i)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i\in I_j}t_i\phi_j(a_i)=\sum_{j=1}^{r}\phi_j\left(\sum_{i\in I_j}t_ia_i\right). \tag{2.5.34}$$

Από την (2.5.26) συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i\in I_1}t_ia_i=\sum_{i\in I_2}t_ia_i=\cdots=\sum_{i\in I_r}t_ia_i=:x. \tag{2.5.35}$$

Μένει να δείξουμε ότι $x\neq 0$. Τότε,

$$0\neq x\in\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{cone}(A_j). \tag{2.5.36}$$

Ειδικότερα, $\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{cone}(A_j)\neq\{0\}$ και, εκ των υστέρων, τα A_j είναι μη κενά.

Για την $x \neq 0$ υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε, μπορούμε να δείξουμε ότι $0 \in \mathrm{conv}(A)$, το οποίο είναι άτοπο. Πράγματι, αφού $\sum\limits_{i=1}^{N+1} t_i = 1$, υπάρχουν $j_0 \leq r$ και $i \in I_{j_0}$ ώστε $t_i > 0$. Όμως, τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$0 = \sum_{i \in I_{j_0}} \frac{t_i}{\sum\limits_{i \in I_{j_0}} t_i} \, a_i, \tag{2.5.37}$$

δηλαδή, $0 \in \mathrm{conv}(A_{j_0}) \subseteq \mathrm{conv}(A)$. □

Απόδειξη του θεωρήματος. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ με $|A| = (r-1)(n+1)+1$. Ορίζουμε

$$\tilde{A} = A \times \{1\} = \{(a,1) : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.5.38}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{conv}(\tilde{A}) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{1\}, \tag{2.5.39}$$

άρα

$$0 \notin \mathrm{conv}(\tilde{A}). \tag{2.5.40}$$

Από την προηγούμενη πρόταση, μπορούμε να βρούμε ξένα ανά δύο $B_1, \ldots, B_r \subseteq \tilde{A}$ ώστε $\bigcap\limits_{j=1}^{r} \mathrm{cone}(B_j) \neq \{0\}$. Από τον ορισμό του $\tilde{A}$, τα $B_1, \ldots, B_r$ είναι σύνολα της μορφής $\tilde{A}_j = A_j \times \{1\}$, και τα $A_1, \ldots, A_r$ είναι ξένα υποσύνολα του A (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή, υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1, \ldots, A_r \subseteq A$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{cone}(A_i \times \{1\}) \neq \{0\}. \tag{2.5.41}$$

Έστω $x \neq 0$ στην τομή των κώνων. Τότε, $x = (u,s)$ για κάποιο $u \in \mathbb{R}^n$ και κάποιο $s > 0$: πράγματι, αφού $x \in \mathrm{cone}(A_1)$, το x είναι της μορφής

$$x = \sum t_i(a_i, 1) = \left(\sum t_i a_i, \sum t_i\right)$$

για κάποια $a_i \in A_1$, και $s = \sum t_i > 0$ διότι όλα τα t_i είναι μη αρνητικά και αν είχαμε $\sum t_i = 0$ θα παίρναμε $u = \sum t_i a_i = 0$, δηλαδή $x = 0$. Πολλαπλασιάζοντας με $1/s$ παίρνουμε σημείο $x' = (u', 1) \in \bigcap\limits_{j=1}^{r} \mathrm{cone}(A_j)$. Τότε, $u' \in \bigcap\limits_{j=1}^{r} \mathrm{conv}(A_j)$. Δηλαδή,

$$\bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{conv}(A_j) \neq \emptyset. \tag{2.5.42}$$

□

2.6 Παράρτημα

2.6.1 Το θεώρημα του Καραθεοδωρή και το πρόβλημα του Waring

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Καραθεοδωρή θα αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 2.6.1. *Έστω k και n δύο φυσικοί αριθμοί. Υπάρχουν $u_1,\dots,u_m \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x\|_2^{2k} = \sum_{i=1}^{m} \langle u_i, x\rangle^{2k}. \tag{2.6.1}$$

Δηλαδή, η k-οστή δύναμη του αθροίσματος των τετραγώνων n πραγματικών μεταβλητών είναι ένα άθροισμα $(2k)$-δυνάμεων κατάλληλων γραμμικών μορφών των μεταβλητών.

Κλασικά παραδείγματα είναι η *ταυτότητα του Liouville*:

$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2)^2 = \frac{1}{6}\sum_{1\le i<j\le 4}(\xi_i+\xi_j)^4 + \frac{1}{6}\sum_{1\le i<j\le 4}(\xi_i-\xi_j)^4, \tag{2.6.2}$$

και η *ταυτότητα του Fleck*:

$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2)^3 = \frac{1}{60}\sum_{1\le i<j<k\le 4}(\xi_i\pm\xi_j\pm\xi_k)^6 + \frac{1}{30}\sum_{1\le i<j\le 4}(\xi_i\pm\xi_j)^6 + \frac{3}{5}\sum_{i=1}^{4}\xi_i^6. \tag{2.6.3}$$

Θα δουλέψουμε στον $H_{2k,n}$, τον γραμμικό χώρο των ομογενών πολυωνύμων $p(x) = p(\xi_1,\dots,\xi_n)$ με n μεταβλητές, που έχουν βαθμό $2k$. Μία βάση του $H_{2k,n}$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων

$$e_\alpha(x) = \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}, \tag{2.6.4}$$

όπου $\alpha = (\alpha_i)_{i\le n}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_n = 2k$. Μπορούμε λοιπόν να ταυτίσουμε τον $H_{2k,n}$ με τον $\mathbb{R}^d$, όπου $d = \binom{n+2k-1}{2k}$. Κάθε $p \in H_{2k,n}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$p(x) = \sum t_\alpha(p)e_\alpha(x),$$

οπότε ταυτίζουμε το p με την ακολουθία $t(p) = (t_\alpha(p)) \in \mathbb{R}^d$. Παρατηρήστε ότι αν $p_m, p \in H_{2k,n}$ τότε $t(p_m) \to t(p)$ στον $\mathbb{R}^d$ αν και μόνο αν $p_m \to p$ ομοιόμορφα στην S^{n-1}.

Ορισμός 2.6.2. *Έστω $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός. Δηλαδή, $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ (ισοδύναμα, $U^tU = Id$ όπου U^t ο «ανάστροφος» του U). Για κάθε $p \in H_{2k,n}$ συμβολίζουμε με $U(p)$ το πολυώνυμο q που ορίζεται από την*

$$q(x) = p(U^{-1}x) = p(U^tx). \tag{2.6.5}$$

Παρατηρούμε ότι:

1. *Το $q = U(p)$ είναι κι αυτό ομογενές πολυώνυμο: $U(p) \in H_{2k,n}$.*
2. *Αν U_1, U_2 είναι δύο ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, τότε*

$$(U_1U_2)(p) = U_1(U_2(p)).$$

3. *Αν $p(x) = \|x\|_2^{2k} = (\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^k$, τότε $U(p) = p$ για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό U.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1 θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα πολυώνυμα της μορφής $c\|x\|_2^{2k}$ είναι τα μόνα ομογενή πολυώνυμα βαθμού $2k$ που είναι «αναλλοίωτα ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς».

Λήμμα 2.6.3. *Αν $p \in H_{2k,n}$ και $U(p) = p$ για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$p(x) = c\|x\|_2^{2k} = c(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^k \tag{2.6.6}$$

για κάθε $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε τυχόν $y \in S^{n-1}$ και θέτουμε $c = p(y)$. Θεωρούμε το πολυώνυνο

$$q(x) = p(x) - c\|x\|_2^{2k}. \tag{2.6.7}$$

Έχουμε $q \in H_{2k,n}$ και, από την υπόθεση που κάναμε για το p,

$$q(Ux) = q(x) \tag{2.6.8}$$

για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Έστω $x \in S^{n-1}$. Υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός U_x με την ιδιότητα $U_x(y) = x$. Τότε,

$$q(x) = q(U_x(y)) = q(y) = 0. \tag{2.6.9}$$

Αφού το q είναι ομογενές και $q(x) = 0$ για κάθε $x \in S^{n-1}$, συμπεραίνουμε ότι $q(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, $p(x) = c\|x\|_2^{2k}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1. Για κάθε $y \in B_2^n$ ορίζουμε

$$p_y(x) = \langle y, x\rangle^{2k}. \tag{2.6.10}$$

Κάθε p_y είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού $2k$. Θεωρούμε την κυρτή θήκη

$$K = \mathrm{conv}(\{p_y : y \in B_2^n\}) \tag{2.6.11}$$

των p_y στον $H_{2k,n}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η B_2^n είναι συμπαγής και η απεικόνιση $y \mapsto p_y$ είναι συνεχής, βλέπουμε ότι το σύνολο $\{p_y : y \in B_2^n\}$ είναι συμπαγές. Από την Πρόταση 2.2.2, το K είναι συμπαγές.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε το πολυώνυμο $c\|x\|_2^{2k}$ να ανήκει στο K. Ορίζουμε

$$p(x) = \frac{1}{|B_2^n|}\int_{B_2^n} p_y(x)\, dy = \frac{1}{|B_2^n|}\int_{B_2^n} \langle y, x\rangle^{2k} dy. \tag{2.6.12}$$

Παρατηρήστε ότι $p \in H_{2k,n}$ και $U(p) = p$ για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό U. Πράγματι,

$$\begin{aligned} p(U^t x) &= \frac{1}{|B_2^n|}\int_{B_2^n} \langle y, U^t x\rangle^{2k} dy = \frac{1}{|B_2^n|}\int_{B_2^n} \langle Uy, x\rangle^{2k} dy \\ &= |\det U| \cdot \frac{1}{|B_2^n|}\int_{U(B_2^n)} \langle z, x\rangle^{2k} dz = p(x), \end{aligned}$$

αφού $|\det U| = 1$ και $U(B_2^n) = B_2^n$. Από το Λήμμα 2.6.3 υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$p(x) = c\|x\|_2^{2k}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αφού $p_y(x) \geq 0$ για κάθε $y \in B_2^n$ και, αν $x \neq 0$ έχουμε $p_y(x) > 0$ για «σχεδόν όλα» τα $y \in B_2^n$, συμπεραίνουμε ότι $p(x) > 0$ για $x \neq 0$. Συνεπώς, $c > 0$.

Το ολοκλήρωμα στην (2.6.12) προσεγγίζεται (ομοιόμορφα ως προς $x \in S^{n-1}$) από πεπερασμένα αθροίσματα Riemann, δηλαδή κυρτούς συνδυασμούς της μορφής

$$\sum_{i=1}^{N} t_i p_{y_i}$$

για κάποια $y_i \in B_2^n$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Άρα, το p ανήκει στην κλειστή θήκη του K. Όμως, το K είναι συμπαγές. Άρα, $p \in K$. Δηλαδή, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_m \in B_2^n$ και $t_i \geq 0$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$c\|x\|_2^{2k} = \sum_{i=1}^{m} t_i \langle y_i, x\rangle^{2k}. \tag{2.6.13}$$

Έπεται το συμπέρασμα του θεωρήματος. □

Το πρόβλημα του Waring. Το 1770, ο Waring ισχυρίστηκε (χωρίς απόδειξη) ότι για κάθε $k \geq 2$ υπάρχει $g(k) \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχουν $s \leq g(k)$ και $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n = m_1^k + \cdots + m_s^k. \tag{2.6.14}$$

Για την ακρίβεια, ο Waring απλώς ισχυρίστηκε ότι μπορούμε να πάρουμε $g(2) = 4$, $g(3) = 9$ και $g(4) = 19$. Ο Hilbert απέδειξε (το 1909) ότι ο ισχυρισμός του Waring είναι σωστός για κάθε $k \geq 2$.

Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος ο Hilbert, για κάθε ζευγάρι φυσικών αριθμών k και n, κατασκεύασε διανύσματα $u_1, \ldots, u_m$ με *ακέραιες συντεταγμένες* και *ρητούς αριθμούς* $c_1, \ldots, c_m$ με την ιδιότητα

$$\|x\|_2^{2k} = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle u_i, x\rangle^{2k} \tag{2.6.15}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ (συγκρίνετε με το Θεώρημα 2.6.1).

Ας δούμε για παράδειγμα πώς χρησιμοποιείται η (2.6.15) στην περίπτωση $k = 4$. Γνωρίζουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός γράφεται σαν άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων φυσικών αριθμών (Lagrange). Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχουν $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}^+$ ώστε $n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$. Εφαρμόζουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τους a_i. Υπάρχουν $a_{ij} \in \mathbb{Z}^+, i, j = 1, \ldots, 4$, ώστε

$$n = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 + a_{i4}^2)^2. \tag{2.6.16}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την (2.6.15) – ή, αν θέλετε, την ταυτότητα (2.6.12) του Liouville – με $n = 4$ και $k = 2$. Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι ο n γράφεται στη μορφή

$$n = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{s} m_j^4 \tag{2.6.17}$$

όπου $m_j \in \mathbb{N}$ και $s \leq 48$ (!). Θεωρήστε τώρα οποιονδήποτε $n \geq 6$. Αυτός γράφεται στη μορφή $n = 6n_1 + x$ για κάποιον $0 \leq x \leq 5$. Εφαρμόζοντας την (2.6.17) για τον n_1 και γράφοντας τον $x = 1^4 + \cdots + 1^4$ σαν άθροισμα το πολύ πέντε τετάρτων δυνάμεων, έχουμε γράψει τον n σαν άθροισμα το πολύ 53 τετάρτων δυνάμεων.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $g_*(k)$ το μικρότερο φυσικό αριθμό για τον οποίο: αν $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχουν $s \leq g_*(k)$ και $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει η (2.6.14). Στη δεκαετία του 1920, οι Hardy και Littlewood ανέπτυξαν μία αναλυτική μέθοδο που οδήγησε (αρκετά αργότερα) στο κάτω φράγμα

$$g_*(k) \geq 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 2. \tag{2.6.18}$$

Εικάζεται ότι το δεξιό μέλος δίνει την ακριβή τιμή της ποσότητας $g_*(k)$. Αυτό έχει επαληθευτεί για $k \leq 471\,600\,000$.

2.6.2 Το θεώρημα του Helly στη θεωρία προσέγγισης

Δίνουμε τώρα μία εφαρμογή του θεωρήματος του Helly σε ένα πρόβλημα της θεωρίας προσέγγισης. Έστω $\{f_1, \ldots, f_m\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων $f_i : T \to \mathbb{R}$ που είναι ορισμένες σε κάποιο σύνολο T. Δίνονται $\varepsilon \geq 0$ και μία συνάρτηση $g : T \to \mathbb{R}$. Για κάθε $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ θεωρούμε τον γραμμικό συνδυασμό $f_a : T \to \mathbb{R}$ των f_i που ορίζεται από την

$$f_a(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(t). \tag{2.6.19}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε $a \in \mathbb{R}^m$ ώστε

$$|g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } t \in T. \tag{2.6.20}$$

Αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα της *ομοιόμορφης προσέγγισης* (ή *προσέγγισης κατά Chebyshev*). Το θεώρημα του Helly δείχνει ότι μπορούμε να βρούμε μία ομοιόμορφη προσέγγιση f_a για την g στο T αν μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο σε κάθε «σχετικά μικρό» υποσύνολο του T.

Θεώρημα 2.6.4. *Έστω T ένα πεπερασμένο σύνολο. Σταθεροποιούμε $\varepsilon \geq 0$. Υποθέτουμε ότι αν $t_1, \ldots, t_{m+1}$ είναι οποιαδήποτε $m+1$ σημεία του T τότε υπάρχει f_a – η οποία εξαρτάται από τα $t_1, \ldots, t_{m+1}$ – ώστε*

$$|g(t_i) - f_a(t_i)| \leq \varepsilon \quad \textit{για κάθε } i = 1, \ldots, m+1. \tag{2.6.21}$$

Τότε, υπάρχει f_a με την ιδιότητα

$$|g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon \quad \textit{για κάθε } t \in T. \tag{2.6.22}$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \in T$ ορίζουμε ένα σύνολο $A(t) \subset \mathbb{R}^m$ ως εξής:

$$A(t) = \{a = (a_1, \ldots, a_m) : |g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon\}. \tag{2.6.23}$$

Με άλλα λόγια, $A(t)$ είναι το σύνολο των $a \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία η συνάρτηση f_a προσεγγίζει την g με ακρίβεια ε *στο σημείο* t.

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε σύνολο $A(t)$ είναι κυρτό σύνολο. Η υπόθεση του θεωρήματος εξασφαλίζει ότι αν $t_1, \ldots, t_{m+1} \in T$ τότε

$$A(t_1) \cap \cdots \cap A(t_{m+1}) \neq \emptyset. \tag{2.6.24}$$

Δηλαδή, η πεπερασμένη οικογένεια κυρτών συνόλων $\{A(t) : t \in T\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly. Έπεται ότι

$$\bigcap_{t \in T} A(t) \neq \emptyset. \tag{2.6.25}$$

Θεωρούμε τυχούσα f_a με $f_a \in A(t)$ για κάθε $t \in T$. Τότε, η f_a ικανοποιεί την (2.6.22). □

Στην περίπτωση που το T είναι άπειρο, μπορούμε να επεκτείνουμε το προηγούμενο θεώρημα αν υποθέσουμε κάποια «ανεξαρτησία» των συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_m$.

Θεώρημα 2.6.5. *Έστω $f_i : T \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$, συναρτήσεις με την εξής ιδιότητα: υπάρχουν $s_1, \ldots, s_n \in T$ ώστε αν για την $f_a = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$ έχουμε $f_a(s_1) = \cdots = f_a(s_n) = 0$ τότε $a_1 = \cdots = a_m = 0$.*

Υποθέτουμε ότι αν $t_1, \ldots, t_{m+1}$ είναι οποιαδήποτε $m+1$ σημεία του T τότε υπάρχει f_a – η οποία εξαρτάται από τα $t_1, \ldots, t_{m+1}$ – ώστε

$$|g(t_i) - f_a(t_i)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, m+1. \tag{2.6.26}$$

Τότε, υπάρχει f_a με την ιδιότητα

$$|g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } t \in T. \tag{2.6.27}$$

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.4, για κάθε $t \in T$ θεωρούμε το σύνολο

$$A(t) = \{a = (a_1, \ldots, a_m) : |g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon\}. \tag{2.6.28}$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$A = A(s_1) \cap \cdots \cap A(s_n). \tag{2.6.29}$$

Θα δείξουμε ότι το A είναι συμπαγές σύνολο. Εύκολα ελέγχουμε ότι το $A(t)$ είναι κλειστό, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένο. Ορίζουμε $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$G(a) = \max\{|f_a(s_i)| : i = 1, \ldots, n\}. \tag{2.6.30}$$

Παρατηρούμε ότι

1. $G(\lambda a) = |\lambda| \cdot G(a)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $G(a) = 0$ αν και μόνο αν $a = 0$ (εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση για την ανεξαρτησία των f_i).
3. Η G είναι συνεχής.

Άρα,

$$\min\{G(a) : a \in S^{m-1}\} = \delta > 0, \tag{2.6.31}$$

οπότε

$$G(a) \geq \delta \|a\|_2 \quad \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}^m. \tag{2.6.32}$$

Παρατηρούμε ότι αν $a \in A$ τότε $|g(s_i) - f_a(s_i)| \leq \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, δηλαδή $|f_a(s_i)| \leq |g(s_i)| + \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Άρα,

$$G(a) \leq R := \varepsilon + \max\{|g(s_i)| : i = 1, \ldots, n\}, \tag{2.6.33}$$

και η (2.6.31) δίνει

$$\|a\|_2 \leq \frac{R}{\delta}. \tag{2.6.34}$$

Δηλαδή, $A \subset (R/\delta)B_2^n$. Συνεπώς, το A είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Για κάθε $t \in T$ θέτουμε $B(t) = A(t) \cap A$. Τότε, κάθε $B(t)$ είναι συμπαγές σύνολο. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Helly όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.4, συμπεραίνουμε ότι η τομή οποιασδήποτε πεπερασμένης οικογένειας συνόλων $A(t)$ είναι μη κενή. Ειδικότερα, κάθε σύνολο της μορφής $B(t_1) \cap \cdots \cap B(t_{m+1})$ είναι μη κενό, κυρτό και συμπαγές. Από την Πρόταση 2.3.3,

$$\bigcap_{t\in T} B(t) \neq \emptyset \quad \text{άρα} \quad \bigcap_{t\in T} A(t) \neq \emptyset. \tag{2.6.35}$$

Αν $a \in \bigcap_{t\in T} A(t)$, τότε η συνάρτηση

$$f_a = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m \tag{2.6.36}$$

προσεγγίζει την g, με σφάλμα το πολύ ίσο με ε, ομοιόμορφα στο T. □

2.6.3 Το θεώρημα του Krasnosselsky

Έστω S ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $x, y \in S$ τότε λέμε ότι το y είναι *ορατό* από το x αν το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$ περιέχεται στο S. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το εξής αποτέλεσμα του Krasnosselsky.

Θεώρημα 2.6.6 (Krasnosselsky, 1947)**.** *Έστω S μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: αν $y_1, \ldots, y_{n+1} \in S$ τότε υπάρχει $x \in S$ ώστε κάθε y_i να είναι ορατό από το x. Τότε, υπάρχει $x \in S$ ώστε κάθε $y \in S$ να είναι ορατό από το x.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in S$ θεωρούμε το σύνολο S_x όλων των $y \in S$ τα οποία είναι ορατά από το x:

$$S_x = \{y \in S : [x, y] \subseteq S\}. \tag{2.6.37}$$

Για κάθε $x \in S$ το σύνολο S_x είναι κλειστό: έστω (y_n) ακολουθία στο S_x και έστω ότι $y_n \to y$. Κάθε $y_n \in S$ και το S είναι κλειστό, άρα $y \in S$. Θα δείξουμε ότι $y \in S_x$, δηλαδή ότι, για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει $(1 - t)x + ty \in S$. Αυτό είναι απλό: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(1 - t)x + ty_n \in S$ διότι $y_n \in S_x$. Αφού το S είναι κλειστό, συμπεραίνουμε ότι

$$(1 - t)x + ty = \lim_{n\to\infty} [(1 - t)x + ty_n] \in S. \tag{2.6.38}$$

Το $t \in [0, 1]$ ήταν τυχόν, άρα $[x, y] \subseteq S$. Έπεται ότι $y \in S_x$.

Είδαμε ότι κάθε S_x είναι κλειστό υποσύνολο του S, άρα είναι συμπαγές σύνολο. Από την Πρόταση 2.2.2 συμπεραίνουμε ότι: για κάθε $x \in S$, η κυρτή θήκη $C_x = \mathrm{conv}(S_x)$ του S_x είναι συμπαγές και κυρτό σύνολο.

Θεωρούμε την οικογένεια

$$C_S = \{C_x \mid x \in S\}. \tag{2.6.39}$$

Από την υπόθεση του θεωρήματος, για κάθε $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ υπάρχει $y \in S$ ώστε $[y, x_i] \subseteq S$ για κάθε $i = 1, \ldots, n + 1$. Δηλαδή,

$$y \in S_{x_1} \cap \cdots \cap S_{x_1} \subseteq C_{x_1} \cap \cdots \cap C_{x_{n+1}}. \tag{2.6.40}$$

Ειδικότερα,

$$C_{x_1} \cap \cdots \cap C_{x_{n+1}} \neq \emptyset. \tag{2.6.41}$$

Αυτό σημαίνει ότι η C_S ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly. Συνεπώς,

$$\bigcap_{x\in S} C_x \neq \emptyset. \tag{2.6.42}$$

Θεωρούμε τυχόν $a \in \bigcap_{x\in S} C_x$. Θα δείξουμε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι $S = S_a$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα: κάθε $y \in S$ είναι ορατό από το a.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $b \in S$ και c στο ευθύγραμμο τμήμα (a,b) ώστε $c \notin S$. Αφού το S είναι κλειστό και $c \notin S$, υπάρχει κλειστή μπάλα $B = B(c,r)$ ώστε $S \cap B = \emptyset$. Μπορούμε να βρούμε $t > 0$ ώστε η κλειστή μπάλα $t(b-c)+B$ να «ακουμπήσει» το S. Πιο συγκεκριμένα, βρίσκουμε τον μικρότερο $t > 0$ για τον οποίο $[t(b-c)+B] \cap S \neq \emptyset$. Η μπάλα $D = B(c+t(b-c), r) = t(b-c)+B$ έχει κοινά σημεία με το S αλλά $\mathrm{int}(D) \cap S = \emptyset$. Θα δείξουμε ότι: *αν $y \in D \cap S$, τότε $a \notin C_y$*. Αφού $a \in \bigcap_{y\in S} C_y$, οδηγούμαστε σε άτοπο.

Έστω $y \in D \cap S$. Γράφουμε $d = c + t(b-c)$, οπότε $D = B(d,r)$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} H &= \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y-d\rangle = \langle y, y-d\rangle\}.\\ H_- &= \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y-d\rangle < \langle y, y-d\rangle\}.\\ \overline{H}_+ &= \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y-d\rangle \geq \langle y, y-d\rangle\}. \end{aligned}$$

Ισχυρισμός 1. $C_y \subseteq \overline{H}_+$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $S_y \subseteq \overline{H}_+$. Έστω $z \in S_y$. Για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε $y - t(y-z) = (1-t)y + tz \in S$, άρα $\|d - y + t(y-z)\|_2 \geq \|y-d\|_2$. Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\|d-y\|_2^2 + 2t\langle d-y, y-z\rangle + t^2\|y-z\|_2^2 \geq \|y-d\|_2^2. \tag{2.6.43}$$

Απλοποιώντας, διαιρώντας με t και παίρνοντας όριο καθώς το $t \to 0^+$, καταλήγουμε στην $\langle d-y, y-z\rangle \geq 0$, δηλαδή

$$\langle z, y-d\rangle \geq \langle y, y-d\rangle. \tag{2.6.44}$$

Αυτό δείχνει ότι $z \in \overline{H}_+$. □

Ισχυρισμός 2. $a \in H_-$.

Από τον ορισμό του t, για μικρά $\theta > 0$ έχουμε $[-\theta(b-c)+D] \cap S = \emptyset$. Ξεκινώντας από την $\|y - d + \theta(b-c)\|_2 > \|y-d\|_2$ και δουλεύοντας όπως στην απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού, καταλήγουμε στην

$$\langle b-c, d-y\rangle \leq 0. \tag{2.6.45}$$

Αφού το $a-d$ είναι αρνητικό πολλαπλάσιο του $b-c$, αυτό σημαίνει ότι

$$\langle a-d, d-y\rangle \geq 0. \tag{2.6.46}$$

Τότε,

$$\langle a-y, d-y\rangle = \langle a-d, d-y\rangle + \|d-y\|_2^2 > 0. \tag{2.6.47}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\langle a, y-d\rangle < \langle y, y-d\rangle, \tag{2.6.48}$$

δηλαδή, $a \in H_-$. □

Συνδυάζοντας τους δύο ισχυρισμούς βλέπουμε ότι *αν $y \in D \cap S$, τότε $a \notin C_y$* και καταλήγουμε σε άτοπο. □