ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Υπερεπίπεδα στήριξης και διαχωριστικά θεωρήματα

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

4 Υπερεπίπεδα στήριξης και διαχωριστικά θεωρήματα

4.1 Αφινική θήκη και αφινική διάσταση

Ορισμός 4.1.1 (αφινικός συνδυασμός). *Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Το $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται αφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_k$ αν*

$$x = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k \tag{4.1.1}$$

για κάποιους $t_i \in \mathbb{R}$ με $t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1$.

Ορισμός 4.1.2 (αφινική θήκη). *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η αφινική θήκη $\mathrm{aff}(S)$ του S είναι το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών σημείων του S. Δηλαδή,*

$$\mathrm{aff}(S) = \{x = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k : k \geq 0, t_i \in \mathbb{R}, t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1\}.$$

Λήμμα 4.1.3. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in S$. Τότε, η $\mathrm{aff}(S)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \mathrm{aff}(S)$. Τότε, υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_k \in S$ και $t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ με $t_1 + \cdots + t_k = 1$ ώστε

$$x = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k. \tag{4.1.2}$$

Ομοίως,

$$y = s_0y_0 + s_1y_1 + \cdots + s_my_m, \tag{4.1.3}$$

όπου $y_i \in S$ και $s_i \in \mathbb{R}$ με $s_0 + s_1 + \cdots + s_m = 1$. Μπορούμε να γράψουμε

$$x + y = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k + s_0y_0 + s_1y_1 + \cdots + s_my_m + (-1)0, \tag{4.1.4}$$

όπου $0, x_0, x_1, \ldots, x_k, y_0, y_1, \ldots, y_m \in S$ και $-1 + \sum_i t_i + \sum_j y_j = 1$. Άρα, $x + y \in \mathrm{aff}(S)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathrm{aff}(S)$ τότε $x = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k$ με $t_i \in \mathbb{R}$, $t_0 + t_1 + \ldots + t_k = 1$ και $x_i \in S$, οπότε

$$\lambda x = (\lambda t_0)x_0 + (\lambda t_1)x_1 + \cdots + (\lambda t_k)x_k + (1 - \lambda)0, \tag{4.1.5}$$

όπου $0, x_0, x_1, \ldots, x_k \in S$ και $(1 - \lambda) + \sum_i \lambda t_i = 1$. Δηλαδή, $\lambda x \in \mathrm{aff}(S)$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $\mathrm{aff}(S)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. □

Λήμμα 4.1.4. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $z \in \mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{aff}(S) - z = \mathrm{aff}(S - z). \tag{4.1.6}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{aff}(S)$. Τότε, το x γράφεται στη μορφή $x = \sum_{i=0}^{k} t_ix_i$ με $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$. Άρα,

$$x - z = \sum_{i=0}^{k} t_ix_i - z = \sum_{i=0}^{k} t_ix_i - \sum_{i=0}^{k} t_iz = \sum_{i=0}^{k} t_i(x_i - z) \in \mathrm{aff}(S - z). \tag{4.1.7}$$

Έτσι, έχουμε ότι

$$\mathrm{aff}(S) - z \subseteq \mathrm{aff}(S - z). \tag{4.1.8}$$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός αποδεικνύεται παρόμοια. □

Λήμμα 4.1.5. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $x \in S$ υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ ώστε $\mathrm{aff}(S) = x + F$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in S$. Τότε $\mathrm{aff}(S) - x = \mathrm{aff}(S - x)$, άρα

$$\mathrm{aff}(S) = x + \mathrm{aff}(S - x) \tag{4.1.9}$$

και ο $F = \mathrm{aff}(S - x)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ από το Λήμμα 4.1.3, διότι $0 \in S - x$. □

Πρόταση 4.1.6. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει μοναδικός υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα*

$$\mathrm{aff}(S) = x + F \tag{4.1.10}$$

για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα, αν θεωρήσουμε τυχόν $x \in S$ τότε $\mathrm{aff}(S) = x + \mathrm{aff}(S - x)$ και ο $F = \mathrm{aff}(S - x)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρούμε επίσης ότι: αν $\mathrm{aff}(S) = x + F$ για κάποιον υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ τότε $x \in x + F = \mathrm{aff}(S)$.

Υποθέτουμε λοιπον ότι

$$\mathrm{aff}(S) = x_1 + F_1 = x_2 + F_2 \tag{4.1.11}$$

για κάποιους υπόχωρους F_1, F_2 του $\mathbb{R}^n$ και κάποια $x_1, x_2 \in \mathrm{aff}(S)$ και θα δείξουμε ότι $F_1 = F_2$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathrm{aff}(S - x_1) = \mathrm{aff}(S - x_2). \tag{4.1.12}$$

Λόγω συμμετρίας, αρκεί να δείξουμε τον εγκλεισμό $\mathrm{aff}(S - x_1) \subseteq \mathrm{aff}(S - x_2)$. Έστω $z \in \mathrm{aff}(S - x_1)$. Τότε,

$$z = \sum_{i=0}^{k} t_i(s_i - x_1) = \sum_{i=0}^{k} t_i(s_i - x_2) + (-1)(x_1 - x_2) \in \mathrm{aff}(S - x_2), \tag{4.1.13}$$

διότι ο $\mathrm{aff}(S - x_2)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $x_1 - x_2 \in \mathrm{aff}(S - x_2)$. Άρα, $\mathrm{aff}(S - x_1) \subseteq \mathrm{aff}(S - x_2)$. □

Ορισμός 4.1.7 (αφινική διάσταση)**.** *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Είδαμε ότι $\mathrm{aff}(S) = x + F$ για κάποιον μονοσήμαντα ορισμένο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$. Η διάσταση του F λέγεται αφινική διάσταση του S.*

Ορισμός 4.1.8 (αφινική ανεξαρτησία)**.** *Τα $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ λέγονται αφινικά εξαρτημένα αν κάποιο από αυτά είναι αφινικός συνδυασμός των υπολοίπων. Σε αντίθετη περίπτωση, λέγονται αφινικά ανεξάρτητα.*

Λήμμα 4.1.9. *Έστω $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφινικά εξαρτημένα.

(ii) Υπάρχουν $t_0, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, όχι όλοι ίσοι με μηδέν, ώστε

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 0 \ \text{ και } \ t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k = 0.$$

(iii) Υπάρχει $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ ώστε τα $x_j - x_i$, $j \neq i$, να είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα το (i). Κάποιο από τα x_i είναι αφινικός συνδυασμός των υπολοίπων. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_0 = t_1x_1 + \cdots + t_kx_k$ για κάποιους $t_i \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$. Θέτοντας $t_0 = -1$ έχουμε

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 0 \ \text{ και } \ t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k = 0.$$

Αφού $t_0 \neq 0$, ισχύει το (ii).

Υποθέτουμε τώρα το (ii). Αν υποθέσουμε ότι $t_i \neq 0$, τότε $t_i = -\sum_{j\neq i} t_j$ και αυτό δείχνει ότι $t_j \neq 0$ για τουλάχιστον ένα $j_0 \neq i$. Γράφουμε

$$\sum_{j\neq i} t_j(x_j - x_i) = \sum_{j\neq i} t_jx_j + \left(-\sum_{j\neq i} t_j\right)x_i = \sum_{j\neq i} t_jx_j + t_ix_i = \sum_{j=0}^{k} t_jx_j = 0.$$

Αφού $t_{j_0} \neq 0$, τα $x_j - x_i$, $j \neq i$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή ισχύει το (iii).

Τέλος, υποθέτουμε ότι ισχύει το (iii). Υπάρχουν $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ και t_j, $j \neq i$, όχι όλοι μηδέν, ώστε $\sum_{j\neq i} t_j(x_j - x_i) = 0$. Τότε,

$$\sum_{j\neq i} t_jx_j + \left(-\sum_{j\neq i} t_j\right)x_i = 0, \tag{4.1.14}$$

δηλαδή υπάρχουν $s_0, s_1, \ldots, s_k$ όχι όλοι μηδέν, ώστε $\sum_{j=0}^{k} s_j = 0$ και $\sum_{j=0}^{k} s_jx_j = 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $s_0 \neq 0$, και τότε,

$$x_0 = \sum_{j=1}^{k} \left(-\frac{s_j}{s_0}\right) x_j. \tag{4.1.15}$$

Αφού $\sum_{j=1}^{k} s_j = -s_0$, έπεται ότι το x_0 είναι αφινικός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_k$. Δηλαδή, τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά εξαρτημένα. □

Πρόταση 4.1.10. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k \geq 0$. Το S έχει αφινική διάσταση $m \geq k$ αν και μόνον αν υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_k \in S$ ώστε τα $x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Έστω ότι το S έχει αφινική διάσταση $m \geq k$. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in S$ και υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = m$ ώστε $\mathrm{aff}(S) = x_0 + F$, όπου $F = \mathrm{aff}(S - x_0)$. Παρατηρούμε ότι $F = \mathrm{aff}(S - x_0) = \mathrm{span}(S - x_0)$. Ο F είναι υπόχωρος και περιέχει το $S - x_0$, άρα $F \supseteq \mathrm{span}(S - x_0)$. Από την άλλη πλευρά, κάθε στοιχείο του F είναι αφινικός συνδυασμός στοιχείων του $S - x_0$, δηλαδή γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $S - x_0$.

Συνεπώς, $\dim(\mathrm{span}(S - x_0)) = m$. Έπεται ότι το $S - x_0$ περιέχει $m \geq k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Αλλά τότε, υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_k \in S$ ώστε τα $x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_k$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_0, \ldots, x_k \in S$ ώστε τα $x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_k$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αφού ο $F = \mathrm{aff}(S - x_0)$ περιέχει τα $x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_k$, ισχύει $\dim F \geq k$. Δηλαδή η αφινική διάσταση του S είναι $\dim F \geq k$. □

Πόρισμα 4.1.11. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k \geq 0$. Το S έχει αφινική διάσταση k αν και μόνον αν υπάρχουν $k+1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία του S και οποιαδήποτε $k+2$ σημεία του S είναι αφινικά εξαρτημένα.* □

Πόρισμα 4.1.12. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k \geq 0$. Αν το S έχει αφινική διάσταση k και $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα σημεία του S, τότε κάθε $x \in \mathrm{aff}(S)$ γράφεται μονοσήμαντα ως αφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_k$.*

Απόδειξη. Από τα προηγούμενα, αν $x_0 \in S$ τότε ο $F = \mathrm{aff}(S - x_0)$ είναι υπόχωρος διάστασης k και έχει βάση $\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$, όπου $x_1, \ldots, x_k \in S$. Τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα. Έστω $x \in \mathrm{aff}(S)$. Τότε, $x - x_0 = t_1(x_1 - x_0) + \cdots + t_k(x_k - x_0)$ άρα

$$x = (1 - t_1 - \cdots - t_k)x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k, \tag{4.1.16}$$

δηλαδή το x γράφεται ως αφινικός συνδυασμός των $x_0, \ldots, x_k$.

Για το μονοσήμαντο υποθέτουμε ότι

$$t_0x_0 + \cdots + t_kx_k = s_0x_0 + \cdots + s_kx_k, \tag{4.1.17}$$

όπου $s_0 + \cdots + s_k = t_0 + \cdots + t_k = 1$. Τότε,

$$(t_0 - s_0)x_0 + \cdots + (t_k - s_k)x_k = 0 \text{ και } \sum_{i=0}^{k}(t_i - s_i) = 0. \tag{4.1.18}$$

Αφού τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα, το Λήμμα 4.1.9(ii) δείχνει ότι $t_i = s_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$. □

Ορισμός 4.1.13 (βαρυκεντρικές συντεταγμένες). *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αφινική διάσταση k και έστω $x_0, x_1, \ldots, x_k$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία του S. Αν $x = t_0x_1 + \cdots + t_kx_k \in \mathrm{aff}(S)$, τότε οι μονοσήμαντα ορισμένοι πραγματικοί αριθμοί $t_0, t_1, \ldots, t_k$ είναι οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του x ως προς το $\{x_0, \ldots, x_k\}$.*

4.2 Τοπολογικές ιδιότητες κυρτών συνόλων

Ορισμός 4.2.1 (σχετικό εσωτερικό και σύνορο). *Έστω C μη κενό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το σχετικό εσωτερικό $\mathrm{ri}(C)$ του C είναι το εσωτερικό του C ως προς την αφινική του θήκη $\mathrm{aff}(C)$. Δηλαδή, $x \in \mathrm{ri}(C)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$B(x, \delta) \cap \mathrm{aff}(C) \subseteq C. \tag{4.2.1}$$

Το σχετικό σύνορο του C είναι το σύνολο

$$\mathrm{rb}(C) = \overline{C} \setminus \mathrm{ri}(C). \tag{4.2.2}$$

Δηλαδή, το σύνορο του C ως προς την αφινική του θήκη $\mathrm{aff}(C)$ (παρατηρήστε ότι η κλειστή θήκη του C ως προς την $\mathrm{aff}(C)$ συμπίπτει με το $\overline{C}$, διότι η $\mathrm{aff}(C)$ είναι κλειστό σύνολο).

Ορισμός 4.2.2 (simplex). *Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_k$ αφινικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Η κυρτή τους θήκη*

$$\mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}) \tag{4.2.3}$$

λέγεται k–simplex.

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $1 \leq k \leq n$ και $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\})$ ένα k–simplex στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{ri}(S) = \{t_0 x_1 + t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k : 0 < t_i < 1, t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1\}. \tag{4.2.4}$$

Ειδικότερα, $\mathrm{ri}(S) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Μεταφέροντας αν χρειαστεί το S, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$ και, αφού εξετάζουμε το σχετικό εσωτερικό του S, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $k = n$. Με αυτές τις υποθέσεις, έχουμε

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1 \right\} \tag{4.2.5}$$

και θα δείξουμε ότι

$$\mathrm{int}(S) \supseteq V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : 0 < t_i < 1, \sum_{i=1}^{n} t_i < 1 \right\}, \tag{4.2.6}$$

οπότε, ειδικότερα, $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως εξής: τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα, κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, και τότε ορίζουμε

$$f(x) = f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) = (t_1, \ldots, t_n). \tag{4.2.7}$$

Αφού κάθε t_i εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων των x_i, x (λύνουμε το σύστημα $t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n = x$ ως προς t_i), εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$B = \left\{ (t_1, \ldots, t_n) : 0 < t_i < 1, \sum_{i=1}^{n} t_i < 1 \right\} \tag{4.2.8}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Από τον ορισμό της f έχουμε $f^{-1}(B) \subseteq S$. Το σύνολο $V = f^{-1}(B)$ είναι μη κενό και ανοικτό, διότι η f είναι συνεχής. Άρα, $\mathrm{int}(S) \supseteq V$. □

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω C μη κενό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,* $\mathrm{ri}(C) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Έστω k η αφινική διάσταση του C. Τότε, υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_k \in C$ ώστε το $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\})$ να είναι k–simplex. Από την Πρόταση 4.2.3 υπάρχει $x \in \mathrm{ri}(S)$. Όμως, $S \subseteq C$ και $\mathrm{aff}(S) = \mathrm{aff}(C)$. Άρα, $x \in \mathrm{ri}(C)$. Δηλαδή, $\mathrm{ri}(C) \neq \emptyset$. □

Θεώρημα 4.2.5. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\overline{C} = A_C := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ υπάρχει } y \in C \text{ ώστε } (x, y] \subseteq C\} \tag{4.2.9}$$

και

$$\mathrm{int}(C) = B_C := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}^n \text{ με } y \neq x, \text{ υπάρχει } z \in (x, y) \text{ ώστε } [x, z] \subseteq C\}. \tag{4.2.10}$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 4.2.6. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $x \in \overline{C}$ και $y \in \mathrm{int}(C)$, τότε $[y, x) \subseteq \mathrm{ri}(C)$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\dim(C) = n$. Έστω $x \in \overline{C}$ και $y \in \mathrm{ri}(C)$. Θεωρούμε τυχόν $z \in (y,x)$. Δηλαδή, $z = (1-t)x + ty$ για κάποιο $t \in (0,1)$. Γράφουμε

$$y = \frac{1}{t}(z - (1-t)x). \tag{4.2.11}$$

Αφού $x \in \overline{C}$, υπάρχει ακολουθία (x_k) στο C ώστε $x_k \to x$. Ορίζουμε

$$y_k = \frac{1}{t}(z - (1-t)x_k). \tag{4.2.12}$$

Τότε, $y_k \to y$. Αφού $y \in \mathrm{int}(C)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq C$. Τότε, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $y_k \in B(y,\delta)$ για κάθε $k \geq k_0$. Σταθεροποιούμε ένα $k \geq k_0$ και βρίσκουμε $\delta_1 > 0$ ώστε $B(y_k,\delta_1) \subseteq B(y,\delta) \subseteq C$. Τότε, το σύνολο $tB(y_k,\delta_1) + (1-t)x_k$ είναι ανοικτό και, από την κυρτότητα του C και το γεγονός ότι $x_k \in C$,

$$tB(y_k,\delta_1) + (1-t)x_k \subseteq tC + (1-t)C = C. \tag{4.2.13}$$

Συνεπώς, $z = ty_k + (1-t)x_k \in C$. Έπεται ότι $[y,x) \subseteq C$. □

Απόδειξη του θεωρήματος 4.2.5. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $C \neq \emptyset$ και, στη συνέχεια, να υποθέσουμε ότι $\dim(C) = n$.

Αν $x \in A_C$ τότε είναι φανερό ότι $x \in \overline{C}$: αφού $(x,y] \subseteq C$ για κάποιο $y \in C$, η ακολουθία $y_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)x + \frac{1}{k}y$ περιέχεται στο C και συγκλίνει στο x. Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{C}$. Από το Θεώρημα 4.2.4 υπάρχει $y \in \mathrm{int}(C)$ και από το Λήμμα 4.2.6 έχουμε $[y,x) \subseteq C$.

Ο δεύτερος ισχυρισμός ισχύει τετριμμένα αν $\dim(C) < n$, αφού σε αυτή την περίπτωση τα δύο σύνολα της ισότητας είναι κενά (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\dim(C) = n$. Αν $x \in \mathrm{int}(C)$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x,\delta) \subseteq C$. Τότε, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ με $y \neq x$ έχουμε $[x,z] \subseteq C$, όπου

$$z = x + \frac{\delta}{2}\frac{y-x}{\|y-x\|_2}. \tag{4.2.14}$$

Συνεπώς, $x \in B_C$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathrm{int}(C) \subseteq B_C$. Αντίστροφα, έστω $x \in B_C$. Θεωρούμε $y \in \mathrm{int}(C)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \neq x$ (αλλιώς, αμέσως έχουμε $x = y \in \mathrm{int}(C)$). Εφαρμόζοντας τον ορισμό του B_C για το $y' = x + (x-y)$ βρίσκουμε $z \in (x,y')$ ώστε $[x,z] \subseteq C$. Από το Λήμμα 4.2.6 έχουμε $[y,z) \subseteq \mathrm{int}(C)$. Όμως, $x \in (y,z)$. Συνεπώς, $x \in \mathrm{int}(C)$. Δηλαδή, $B_C \subseteq \mathrm{int}(C)$. □

Πρόταση 4.2.7. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τα σύνολα $\mathrm{ri}(C)$ και $\overline{C}$ είναι κυρτά.*

Απόδειξη. (α) Έστω $x,y \in \mathrm{ri}(C)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.6 για τα $x \in \mathrm{ri}(C) \subseteq \overline{C}$ και $y \in \mathrm{ri}(C)$, συμπεραίνουμε ότι $(x,y) \subseteq \mathrm{ri}(C)$. Έπεται ότι $[x,y] \subseteq \mathrm{ri}(C)$ και αυτό αποδεικνύει ότι το $\mathrm{ri}(C)$ είναι κυρτό.

(β) Έστω $x,y \in \overline{C}$ και $t \in (0,1)$. Υπάρχουν ακολουθίες (x_m), (y_m) στο C ώστε $x_m \to x$ και $y_m \to y$. Τότε, $z_m := (1-t)x_m + ty_m \to (1-t)x + ty$. Από την κυρτότητα του C έχουμε $z_m \in C$ για κάθε m, άρα $(1-t)x + ty \in \overline{C}$. □

Πρόταση 4.2.8. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\overline{C} = \overline{\mathrm{ri}(C)} \tag{4.2.15}$$

και

$$\mathrm{ri}(C) = \mathrm{ri}(\overline{C}). \tag{4.2.16}$$

Απόδειξη. (α) Από την $\mathrm{ri}(C) \subseteq C$ παίρνουμε $\overline{\mathrm{ri}(C)} \subseteq \overline{C}$. Έστω $x \in \overline{C}$. Θεωρούμε κάποιο $y \in \mathrm{ri}(C)$. Από το Λήμμα 4.2.6 έχουμε $[y, x) \subseteq \mathrm{ri}(C)$. Τότε, είναι φανερό ότι $x \in \overline{[y, x)} \subseteq \overline{\mathrm{ri}(C)}$. Αυτό αποδεικνύει τον αντίστροφο εγκλεισμό.

(β) Αφού $C \subseteq \overline{C}$ και $\mathrm{aff}(C) = \mathrm{aff}(\overline{C})$, έχουμε $\mathrm{ri}(C) \subseteq \mathrm{ri}(\overline{C})$. Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{ri}(\overline{C})$. Θεωρούμε κάποιο $y \in \mathrm{ri}(C)$. Αν $y = x$ έχουμε $x = y \in \mathrm{ri}(C)$. Έστω ότι $y \neq x$. Τότε, παίρνοντας $y_1 = 2x - y \neq y$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.2.5 για το $\overline{C}$, βρίσκουμε $z \in \overline{C}$ ώστε $x \in (y, z)$. Όμως, $[y, z) \subseteq \mathrm{ri}(C)$ από το Λήμμα 4.2.6. Άρα, $x \in \mathrm{ri}(C)$. Δηλάδή, αν $x \in \mathrm{ri}(\overline{C})$ τότε $x \in \mathrm{ri}(C)$. □

4.3 Μετρική προβολή

Έστω C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η *μετρική προβολή* p_C απεικονίζει κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ στο πλησιέστερο προς το x σημείο $p_C(x)$ του C. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα αυτού του σημείου αποδεικνύονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 4.3.1. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικό $p_C(x) \in C$ ώστε*

$$\|x - p_C(x)\|_2 \leq \|x - y\|_2 \tag{4.3.1}$$

για κάθε $y \in C$: δηλαδή, $\|x - p_C(x)\|_2 = d(x, C)$. Η απεικόνιση $x \mapsto p_C(x)$ λέγεται μετρική προβολή του C.

Απόδειξη. Αν $x \in C$ θέτουμε $p_C(x) = x$: είναι φανερό ότι είναι το μοναδικό σημείο του C που ικανοποιεί την (4.3.1) για κάθε $y \in C$.

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $x \notin C$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $y_m \in C$ με την ιδιότητα

$$d(x, C) \leq \|x - y_m\|_2 < d(x, C) + \frac{1}{m}. \tag{4.3.2}$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (y_m) περιέχεται στην κλειστή μπάλα $\overline{B}(x, d(x, C) + 1)$ η οποία είναι συμπαγής. Συνεπώς, υπάρχει υπακολουθία (y_{k_m}) της (y_m) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Αφού $y_{k_m} \in C$ και το C είναι κλειστό, έχουμε $y_0 \in C$. Επιπλέον, η (4.3.2) δείχνει ότι

$$\|x - y_0\|_2 = \lim_{m\to\infty} \|x - y_{k_m}\|_2 = d(x, C). \tag{4.3.3}$$

Για τη μοναδικότητα, ας υποθέσουμε ότι

$$\|x - y\|_2 = \|x - y_0\|_2 = d(x, C) \tag{4.3.4}$$

για κάποιο $y \in C$. Από την κυρτότητα του C έχουμε $\frac{y+y_0}{2} \in C$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου γράφουμε

$$\begin{aligned} 4d^2(x, C) &= 2\|x - y\|_2^2 + 2\|x - y_0\|_2^2 \\ &= \|2x - (y + y_0)\|_2^2 + \|y - y_0\|_2^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{y + y_0}{2}\right\|_2^2 + \|y - y_0\|_2^2 \\ &\geq 4d^2(x, C) + \|y - y_0\|_2^2, \end{aligned}$$

οπότε $\|y - y_0\|_2^2 \leq 0$. Αναγκαστικά, $y = y_0$. □

Το επόμενο Λήμμα περιγράφει μία χρήσιμη ιδιότητα του πλησιέστερου σημείου.

Λήμμα 4.3.2. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $y \in C$ έχουμε*

$$\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0. \tag{4.3.5}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \neq p_C(x)$. Για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε $p_C(x)+t(y-p_C(x)) \in C$, άρα

$$\|x - p_C(x)\|_2^2 \leq \|x - p_C(x) - t(y - p_C(x))\|_2^2. \tag{4.3.6}$$

Αναπτύσσοντας, βλέπουμε ότι

$$2t\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq t^2\|y - p_C(x)\|_2^2. \tag{4.3.7}$$

Διαιρώντας με t και αφήνοντας το $t \to 0^+$ παίρνουμε την (4.3.5). □

Θεώρημα 4.3.3 (Busemann-Feller, 1935)**.** *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η μετρική προβολή $p_C : \mathbb{R}^n \to C$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1. Δηλαδή, αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ τότε*

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2. \tag{4.3.8}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u = p_C(x) \neq p_C(y) = v$. Από το Λήμμα 4.3.2 έχουμε

$$\langle x - u, v - u\rangle \leq 0 \quad \text{και} \quad -\langle y - v, v - u\rangle \leq 0. \tag{4.3.9}$$

Άρα,

$$\langle x - y + v - u, v - u\rangle \leq 0. \tag{4.3.10}$$

Χρησιμοποιώντας και την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\|v - u\|_2^2 \leq \langle y - x, v - u\rangle \leq \|y - x\|_2\|v - u\|_2. \tag{4.3.11}$$

Αφού $u \neq v$, έπεται ότι $\|p_C(y) - p_C(x)\|_2 = \|v - u\|_2 \leq \|y - x\|_2$. □

Ορισμός 4.3.4. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Τότε, $d(x,C) > 0$. Ορίζουμε*

$$u_C(x) = \frac{x - p_C(x)}{d(x,C)}. \tag{4.3.12}$$

Από την $\|x - p_C(x)\|_2 = d(x,C)$ βλέπουμε ότι $\|u_C(x)\|_2 = 1$. Δηλαδή, $u_C(x) \in S^{n-1}$: το $u_C(x)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το $p_C(x)$ προς το x. Συμβολίζουμε με $R_C(x)$ την ημιευθεία που ξεκινάει από το $p_C(x)$ και διέρχεται από το x:

$$R_C(x) = \{p_C(x) + tu_C(x) : \ t \geq 0\}. \tag{4.3.13}$$

Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι αν $x \notin C$ τότε όλα τα σημεία που ανήκουν στην ημιευθεία που ξεκινάει από το $p_C(x)$ και διέρχεται από το x έχουν το ίδιο πλησιέστερο σημείο.

Λήμμα 4.3.5. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Αν $y \in R_C(x)$ τότε $p_C(y) = p_C(x)$.*

Απόδειξη. Αφού $y \in R_C(x)$, έχουμε $y = p_C(x) + t(x - p_C(x))$ για κάποιον $t > 0$. Από το Λήμμα 4.3.2 έχουμε

$$\langle x - p_C(x), p_C(y) - p_C(x)\rangle \leq 0 \tag{4.3.14}$$

και

$$\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq 0. \tag{4.3.15}$$

Αντικαθιστώντας το $y = p_C(x) + t(x - p_C(x))$ στην (4.3.15) έχουμε

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|_2^2 + t\langle x - p_C(x), p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq 0. \tag{4.3.16}$$

Από την (4.3.14) έπεται ότι $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2^2 \leq 0$. Συνεπώς, $p_C(x) = p_C(y)$. □

Έστω C ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{bd}(C)$ το σύνορο του C. Η επόμενη Πρόταση έχει σαν συνέπεια ότι η μετρική προβολή $p_C : \mathbb{R}^n \setminus C \to \mathrm{bd}(C)$ είναι επί.

Πρόταση 4.3.6. *Έστω C ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το C περιέχεται στην ανοικτή μπάλα $B(0,r)$ με κέντρο το 0 και ακτίνα r. Τότε,*

$$p_C(rS^{n-1}) = \mathrm{bd}(C). \tag{4.3.17}$$

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $p_C(rS^{n-1}) \subseteq \mathrm{bd}(C)$ είναι φανερός: γενικά, αν $x \notin C$ τότε $p_C(x) \in \mathrm{bd}(C)$ (εξηγήστε γιατί).

Έστω $z \in \mathrm{bd}(C)$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $x_m \in B^\circ(0,r) \setminus C$ με

$$\|z - x_m\|_2 < \frac{1}{m}. \tag{4.3.18}$$

Από το Θεώρημα 4.3.3 έχουμε

$$\|z - p_C(x_m)\|_2 = \|p_C(z) - p_C(x_m)\|_2 \leq \|z - x_m\|_2 < \frac{1}{m}. \tag{4.3.19}$$

Θεωρούμε την ημιευθεία $R_C(x_m)$. Αυτή τέμνει την rS^{n-1} σε κάποιο σημείο y_m. Από το Λήμμα 4.3.5 έχουμε $p_C(y_m) = p_C(x_m)$, άρα

$$\|z - p_C(y_m)\|_2 < \frac{1}{m}. \tag{4.3.20}$$

Η rS^{n-1} είναι συμπαγής, άρα υπάρχουν $y \in rS^{n-1}$ και υπακολουθία (y_{k_m}) της (y_m) ώστε $y_{k_m} \to y$. Από τη συνέχεια της μετρικής προβολής έχουμε $p_C(y) = \lim\limits_{m\to\infty} p_C(y_{k_m})$. Όμως, η (4.3.20) δείχνει ότι $p_C(y_{k_m}) \to z$.

Συνεπώς, $z = p_C(y) \in p_C(rS^{n-1})$. □

4.4 Υπερεπίπεδα στήριξης και διαχωριστικά θεωρήματα

4.4.1 Υπερεπίπεδα στήριξης

Ορισμός 4.4.1. *Έστω $H = H(u,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle = \alpha\}$, όπου $u \neq 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, ένα υπερεπίπεδο. Θεωρούμε τους κλειστούς ημιχώρους*

$$\overline{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle \geq \alpha\} \quad \text{και} \quad \overline{H}_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle \leq \alpha\} \tag{4.4.1}$$

που ορίζει το H. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι το H στηρίζει το A στο x (ή φέρει το A στο x) αν

1. *$x \in A \cap H$,*
2. *Είτε $A \subseteq \overline{H}_+$ ή $A \subseteq \overline{H}_-$.*

Αν G είναι ένας κλειστός ημίχωρος, λέμε ότι ο G στηρίζει το A αν $A \cap \mathrm{bd}(G) \neq \emptyset$ και $A \subseteq G$. Αν ο $G = \overline{H}_-$ ορίζεται από το υπερεπίπεδο $H = H(u,\alpha)$ και στηρίζει το A σε κάποιο σημείο x, τότε λέμε ότι το u είναι ένα εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του A στο x.

Η μελέτη των ιδιοτήτων της μετρικής προβολής στην §4.3 μας επιτρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη υπερεπιπέδων που στηρίζουν ένα κλειστό κυρτό γνήσιο υποσύνολο του χώρου.

Λήμμα 4.4.2. *Έστω C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ τότε το υπερεπίπεδο που περνάει από το $p_C(x)$ και είναι κάθετο στο $u_C(x)$ στηρίζει το C στο σημείο $p_C(x)$.*

Απόδειξη. Το υπερεπίπεδο που περνάει από το $p_C(x)$ και είναι κάθετο στο $u_C(x)$ είναι το

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u_C(x)\rangle = \langle p_C(x), u_C(x)\rangle\}. \tag{4.4.2}$$

Είναι φανερό ότι

$$p_C(x) \in C \cap H. \tag{4.4.3}$$

Επιπλέον, αν $y \in C$ τότε το Λήμμα 4.3.2 δείχνει ότι

$$\langle u_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \langle y, u_C(x)\rangle \leq \langle p_C(x), u_C(x)\rangle. \tag{4.4.4}$$

Αυτό σημαίνει ότι $C \subseteq \overline{H}_-$. Από τον Ορισμό 4.4.1, το $\overline{H}_-$ στηρίζει το C στο σημείο $p_C(x)$. □

Θεώρημα 4.4.3. (α) *Έστω C ένα μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $y \in \mathrm{bd}(C)$ τότε υπάρχει υπερεπίπεδο που στηρίζει το C στο σημείο y.*

(β) *Έστω C ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $u \in S^{n-1}$ υπάρχει υπερεπίπεδο $H(u)$ που στηρίζει το C και έχει εξωτερικό κάθετο διάνυσμα το u.*

Απόδειξη. (α) Έστω $y \in \mathrm{bd}(C)$. Υποθέτουμε πρώτα ότι το C είναι φραγμένο. Τότε, υπάρχει $r > 0$ ώστε το C να περιέχεται στην ανοικτή μπάλα $B(0,r)$ με κέντρο το 0 και ακτίνα r. Από το Λήμμα 4.3.6, υπάρχει $x \in rS^{n-1}$ με την ιδιότητα $p_C(x) = y$. Από το Λήμμα 4.4.2 υπάρχει υπερεπίπεδο που στηρίζει το C στο σημείο y.

Έστω τώρα ότι το C δεν είναι φραγμένο. Το σύνολο $C \cap B(y,1)$ (όπου $B(y,1)$ είναι η κλειστή μπάλα με κέντρο το y και ακτίνα 1) είναι μη κενό, συμπαγές και κυρτό. Αφού $y \in \mathrm{bd}(C)$ έχουμε $y \in \mathrm{bd}(C \cap B(y,1))$ (εξηγήστε γιατί). 'Αρα, υπάρχει υπερεπίπεδο H το οποίο στηρίζει το $C \cap B(y,1)$ στο σημείο y. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$C \cap B(y,1) \subseteq \overline{H}_-. \tag{4.4.5}$$

Αν δεν ισχύει η $C \subseteq \overline{H}_-$, τότε υπάρχει $z \in C \setminus \overline{H}_-$. Από την κυρτότητα του C έχουμε $[y,z] \subseteq C$. Όμως, το z ανήκει στο συμπλήρωμα του $\overline{H}_-$, άρα το $(y,z] \cap B(y,1)$ δεν μπορεί να περιέχεται στο $\overline{H}_-$, άτοπο.

(β) Έστω $u \in S^{n-1}$. Η συνάρτηση $y \mapsto \langle y, u\rangle$ είναι συνεχής. Αφού το C είναι συμπαγές, υπάρχει $y_0 \in C$ ώστε

$$\langle y_0, u\rangle = \max\{\langle y, u\rangle : y \in C\}. \tag{4.4.6}$$

Θέτουμε

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u\rangle = \langle y_0, u\rangle\}. \tag{4.4.7}$$

Τότε, $C \subseteq \overline{H}_-$ και $y_0 \in C \cap H$. Άρα, το H στηρίζει το C στο σημείο y_0 και έχει εξωτερικό κάθετο διάνυσμα το u. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η ιδιότητα (α) του Θεωρήματος 4.4.3 χαρακτηρίζει τα κλειστά κυρτά σύνολα που έχουν μη κενό εσωτερικό.

Θεώρημα 4.4.4. *Έστω C ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Υποθέτουμε ότι για κάθε $y \in \mathrm{bd}(C)$ υπάρχει υπερεπίπεδο που στηρίζει το C στο y. Τότε, το C είναι κυρτό.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το C δεν είναι κυρτό. Τότε, υπάρχουν $x, y \in C$ και $z \in [x, y]$ με $z \notin C$. Αφού το C έχει μη κενό εσωτερικό, υπάρχει $w \in \mathrm{int}(C)$ ώστε τα x, y και w να μην είναι συνευθειακά.

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[w, z]$. Αφού $z \notin C$, υπάρχει $u \in [w, z)$ το οποίο ανήκει στο σύνορο του C. Από την υπόθεση, υπάρχει υπερεπίπεδο H που στηρίζει το C στο u. Έχουμε $w \notin H$, άρα η τομή του H με το επίπεδο E που ορίζουν τα x, y και w είναι μία ευθεία ℓ που περνάει από το u. Αφού το C περιέχεται στον έναν από τους δύο κλειστούς ημιχώρους που ορίζει το H, τα x, y και w είναι στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα του E που ορίζει η ℓ. Αυτό είναι άτοπο, αφού η ℓ περνάει από το u το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου xyw. □

4.4.2 Διαχωριστικά θεωρήματα

Ορισμός 4.4.5. *(α) Έστω $H = H(u, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = \alpha\}$, όπου $u \neq 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, ένα υπερεπίπεδο. Αν A, B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι το H διαχωρίζει τα A και B αν $A \subseteq \overline{H}_+$ και $B \subseteq \overline{H}_-$ ή $A \subseteq \overline{H}_-$ και $B \subseteq \overline{H}_+$.*

(β) Λέμε ότι τα A και B διαχωρίζονται γνήσια από το H αν $A \subseteq H_+$ και $B \subseteq H_-$ ή $A \subseteq H_-$ και $B \subseteq H_+$, όπου H_+ και H_- οι ανοικτοί ημίχωροι που ορίζονται από το H.

(γ) Τέλος, λέμε ότι τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά από το H αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε τα A και B να διαχωρίζονται τόσο από το $H(u, \alpha - \varepsilon)$ όσο και από το $H(u, \alpha + \varepsilon)$.

(δ) Λέγοντας ότι το A διαχωρίζεται από το σημείο x εννοούμε ότι τα σύνολα A και $\{x\}$ διαχωρίζονται.

Θεώρημα 4.4.6. *Έστω C μη κενό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $x \notin C$. Τότε, τα C και x και διαχωρίζονται.*

Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι το C είναι κλειστό, τότε τα C και x διαχωρίζονται αυστηρά.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το C είναι κλειστό. Το υπερεπίπεδο H που περνάει από το $p_C(x)$ και είναι κάθετο στο $u_C(x)$ στηρίζει το C, άρα διαχωρίζει τα C και x. Αν θεωρήσουμε το υπερεπίπεδο H_1 που περνάει από το $\frac{p_C(x)+x}{2}$ και είναι κάθετο στο $u_C(x)$, αυτό διαχωρίζει αυστηρά τα C και x.

Έστω τώρα ότι το C δεν είναι κλειστό. Αν το x δεν ανήκει στην κλειστή θήκη $\overline{C}$ του C, από τον προηγούμενο ισχυρισμό υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει το κλειστό κυρτό σύνολο $\overline{C}$ από το x. Αυτό το υπερεπίπεδο διαχωρίζει τα C και x. Αν $x \in \overline{C} \setminus C$, τότε $x \in \mathrm{bd}(\overline{C})$. Τότε, το Θεώρημα 4.4.3(α) δείχνει ότι υπάρχει υπερεπίπεδο H που στηρίζει το $\overline{C}$ στο σημείο x. Αυτό το υπερεπίπεδο διαχωρίζει τα C και x. □

Άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 4.4.6 είναι το εξής βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4.7. *Κάθε μη κενό, κλειστό και κυρτό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι η τομή των κλειστών ημιχώρων που το στηρίζουν.*

Απόδειξη. Έστω C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Από τον ορισμό του «ημιχώρου στήριξης» είναι φανερό ότι

$$C \subseteq \cap\{G : \text{ ο } G \text{ είναι κλειστός ημίχωρος που στηρίζει το } C\}.$$

Έστω $x \notin C$. Από το Θεώρημα 4.4.6 το x διαχωρίζεται αυστηρά από το C, δηλαδή υπάρχει κλειστός ημίχωρος G ο οποίος στηρίζει το C και δεν περιέχει το x. □

Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι το να διαχωρίσουμε δύο υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου ανάγεται στο πρόβλημα του να διαχωρίσουμε σημείο από σύνολο.

Λήμμα 4.4.8. *Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τα A και B διαχωρίζονται (διαχωρίζονται αυστηρά) αν και μόνο αν τα $A - B$ και 0 διαχωρίζονται (διαχωρίζονται αυστηρά).*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά από το H: υπάρχουν $u \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε τα A και B να διαχωρίζονται τόσο από το $H(u, \alpha - \varepsilon)$ όσο και από το $H(u, \alpha + \varepsilon)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$A \subseteq \{x : \langle x, u\rangle \geq \alpha + \varepsilon\} \quad \text{και} \quad B \subseteq \{x : \langle x, u\rangle \leq \alpha - \varepsilon\}. \tag{4.4.8}$$

Έστω $x \in A - B$. Μπορούμε να γράψουμε $x = a - b$, όπου $a \in A$ και $b \in B$. Από την (4.4.8) παίρνουμε

$$\langle x, u\rangle = \langle a, u\rangle - \langle b, u\rangle \geq (\alpha + \varepsilon) - (\alpha - \varepsilon) = 2\varepsilon. \tag{4.4.9}$$

Συνεπώς, τα $A - B$ και 0 διαχωρίζονται αυστηρά από το υπερεπίπεδο

$$H(u, \varepsilon) = \{x : \langle x, u\rangle = \varepsilon\}. \tag{4.4.10}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι τα $A - B$ και 0 διαχωρίζονται αυστηρά. Τότε, υπάρχουν $u \neq 0$ και $\varepsilon > 0$ ώστε

$$\langle x, u\rangle \geq 2\varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in A - B. \tag{4.4.11}$$

Ορίζουμε

$$s = \inf\{\langle a, u\rangle : a \in A\} \quad \text{και} \quad t = \sup\{\langle b, u\rangle : b \in B\}. \tag{4.4.12}$$

Από την (4.4.11) έχουμε $\langle b, u\rangle + 2\varepsilon \leq \langle a, u\rangle$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Άρα, $t + 2\varepsilon \leq s$. Έπεται ότι το

$$H\left(u, \frac{s+t}{2}\right) = \left\{x : \langle x, u\rangle = \frac{s+t}{2}\right\} \tag{4.4.13}$$

διαχωρίζει αυστηρά τα A και B.

Στην περίπτωση που ζητάμε τα A και B να διαχωρίζονται (απλώς), η απόδειξη είναι εντελώς όμοια. □

Με την υπόθεση ότι τα A και B είναι κυρτά έχουμε σαν άμεσο πόρισμα το εξής διαχωριστικό θεώρημα.

Θεώρημα 4.4.9. *Έστω A και B μη κενά, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $A \cap B = \emptyset$. Τότε, τα A και B διαχωρίζονται.*

Αν, επιπλέον, το A είναι συμπαγές και το B είναι κλειστό, τότε τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά.

Απόδειξη. Αφού τα A και B είναι κυρτά, εύκολα ελέγχουμε ότι το $A - B$ είναι κυρτό σύνολο. Από την υπόθεση ότι $A \cap B = \emptyset$ έπεται ότι $0 \notin A - B$. Από το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 4.4.6, τα $A - B$ και 0 και διαχωρίζονται. Από το Λήμμα 4.4.8, τα A και B διαχωρίζονται.

Αν υποθέσουμε ότι το A είναι συμπαγές και το B είναι κλειστό, τότε το $A - B$ είναι κλειστό: θεωρήστε ακολουθία $x_m = a_m - b_m$ στο $A - B$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z \in \mathbb{R}^n$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_m}) της (a_m) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $a \in A$. Τότε,

$$b_{k_m} = a_{k_m} - (a_{k_m} - b_{k_m}) \to a - z \tag{4.4.14}$$

και $a - z = b \in B$ αφού το B είναι κλειστό. Συνεπώς, $z = a - b \in A - B$. Από το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 4.4.6, τα $A - B$ και 0 διαχωρίζονται αυστηρά. Από το Λήμμα 4.4.8, τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά. □

4.5 Πολικό συνόλου

Ορισμός 4.5.1. *Έστω C ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το πολικό του C είναι το σύνολο*

$$C^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 1 \text{ για κάθε } x \in C\}. \tag{4.5.1}$$

Παρατηρήσεις 4.5.2. *(α) Το C° είναι μη κενό: παρατηρήστε ότι $0 \in C^\circ$.*

(β) Το C° είναι κυρτό και κλειστό: αν $y_1, y_2 \in C^\circ$ και $t \in [0,1]$, τότε για κάθε $x \in C$ έχουμε

$$\langle x, (1-t)y_1 + ty_2\rangle = (1-t)\langle x, y_1\rangle + t\langle x, y_2\rangle \leq (1-t)\cdot 1 + t\cdot 1 = 1. \tag{4.5.2}$$

Άρα, $(1-t)y_1 + ty_2 \in C^\circ$. Για να δείξουμε ότι το C° είναι κλειστό, θεωρούμε $y_m \in C^\circ$ με $y_m \to y \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in C$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $\langle x, y_m\rangle \leq 1$, άρα

$$\langle x, y\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle x, y_m\rangle \leq 1. \tag{4.5.3}$$

Έπεται ότι $y \in C^\circ$.

(γ) Αν το C είναι φραγμένο, τότε το C° περιέχει μία μπάλα με κέντρο το 0 (άρα, έχει μη κενό εσωτερικό). Πράγματι, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\|_2 \leq M$ για κάθε $x \in C$. Αν $\|y\|_2 \leq 1/M$, τότε

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|_2\|y\|_2 \leq M\cdot\frac{1}{M} = 1. \tag{4.5.4}$$

Δηλαδή, η μπάλα $B(0, 1/M)$ περιέχεται στο C°.

(δ) Αν το C περιέχει μία μπάλα με κέντρο το 0 τότε το C° είναι φραγμένο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $B(0,r) \subseteq C$. Έστω $0 \neq y \in C^\circ$. Τότε, το σημείο $x = ry/\|y\|_2$ ανήκει στην $B(0,r)$, άρα ανήκει στο C. Έπεται ότι

$$1 \geq \langle x, y\rangle = \left\langle \frac{ry}{\|y\|_2}, y\right\rangle = r\|y\|_2. \tag{4.5.5}$$

Με άλλα λόγια, $C^\circ \subseteq B(0, 1/r)$.

Συμβολίζουμε με $C^{\circ\circ}$ το πολικό του πολικού του C. Δηλαδή, $C^{\circ\circ} := (C^\circ)^\circ$.

Πρόταση 4.5.3. *Έστω C μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$C^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}}(C \cup \{0\}). \tag{4.5.6}$$

Δηλαδή, το $C^{\circ\circ}$ είναι το μικρότερο κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει το C και το 0.

Απόδειξη. Από τον ορισμό βλέπουμε εύκολα ότι $C^{\circ\circ} \supseteq C$. Από τις Παρατηρήσεις (α) και (β) το $C^{\circ\circ}$ είναι κλειστό, κυρτό και περιέχει το 0. Έπεται ότι

$$C^{\circ\circ} \supseteq \overline{\mathrm{conv}}(C \cup \{0\}). \tag{4.5.7}$$

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει ισότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in C^{\circ\circ}$ το οποίο δεν ανήκει στο $\overline{\mathrm{conv}}(C \cup \{0\})$. Από το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 4.4.6, υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει αυστηρά το x από το $\overline{\mathrm{conv}}(C \cup \{0\})$. Ειδικότερα, μπορούμε να βρούμε $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle z, y\rangle < \alpha \text{ για κάθε } z \in C \cup \{0\} \tag{4.5.8}$$

και

$$\langle x, y\rangle > \alpha. \tag{4.5.9}$$

Αφού $0 \in C \cup \{0\}$, έχουμε $\alpha > 0$. Από την (4.5.8) έπεται ότι $\langle z, y/\alpha\rangle < 1$ για κάθε $z \in C$, άρα $y/\alpha \in C^{\circ}$. Όμως, η (4.5.9) δίνει $\langle x, y/\alpha\rangle > 1$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x \in C^{\circ\circ}$. □

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το C είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.5.3 είναι η εξής.

Πρόταση 4.5.4. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in C$. Τότε, $C^{\circ\circ} = \overline{C}$. Ειδικότερα, αν το C είναι κλειστό τότε $C^{\circ\circ} = C$.* □

Αν υποθέσουμε ότι το C είναι κυρτό σώμα που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, τότε η Πρόταση 4.5.4 και οι Παρατηρήσεις (γ) και (δ) δείχνουν το εξής.

Πρόταση 4.5.5. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Τότε:*

1. *Το K° είναι κυρτό σώμα και $0 \in \mathrm{int}(K^{\circ})$.*
2. *$K^{\circ\circ} = K$.* □

Η επόμενη Πρόταση χαρακτηρίζει τα σημεία του συνόρου του πολικού ενός κυρτού σώματος. Η στενή σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε ένα κυρτό σώμα και στο πολικό του θα μελετηθεί στο επόμενο Κεφάλαιο.

Πρόταση 4.5.6. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, και έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Τότε, $y \in \mathrm{bd}(K^{\circ})$ αν και μόνο αν το K στηρίζεται από τον ημίχωρο*

$$G(y,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 1\}. \tag{4.5.10}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $G(y,1)$ στηρίζει το K. Αφού $K \subseteq G(y,1)$, έχουμε $y \in K^{\circ}$. Αν $y \in \mathrm{int}(K^{\circ})$, τότε υπάρχει $t > 1$ ώστε $ty \in K^{\circ}$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό σημαίνει ότι

$$\max\{\langle x, y\rangle : x \in K\} = \frac{1}{t}\max\{\langle x, ty\rangle : x \in K\} \leq \frac{1}{t} < 1, \tag{4.5.11}$$

το οποίο είναι άτοπο: αφού ο $G(y,1)$ στηρίζει το K, υπάρχει $x_0 \in K \cap H(y,1)$. Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε $\langle x_0, y\rangle = 1$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $y \in \mathrm{bd}(K^\circ)$. Αφού $0 \in \mathrm{int}(K)$, έχουμε $y \neq 0$ και

$$0 < \max\{\langle x,y\rangle : x \in K\} \leq 1. \tag{4.5.12}$$

Μένει να δείξουμε ότι στη δεξιά ανισότητα έχουμε ισότητα. Αν όχι, τότε υπάρχει $t > 1$ ώστε $\max\{\langle x,ty\rangle : x \in K\} = 1$. Έπεται ότι $ty \in K^\circ$. Αφού το K° είναι κυρτό σώμα και περιέχει το 0, συμπεραίνουμε ότι $[0,ty] \subset K^\circ$, και αφού το y είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $[0,ty]$ συμπεραίνουμε ότι $y \in \mathrm{int}(K^\circ)$ (χρησιμοποιούμε το Λήμμα 4.2.6). Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα

$$\max\{\langle x,y\rangle : x \in K\} = 1. \tag{4.5.13}$$

Τότε, ο $G(y,1)$ στηρίζει το K. □