ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Κυρτές συναρτήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

5 Κυρτές συναρτήσεις

5.1 Κυρτές συναρτήσεις μίας μεταβλητής

Σε αυτή την παράγραφο υπενθυμίζουμε κάποια βασικά αποτελέσματα για κυρτές συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I είναι ένα (κλειστό, ανοικτό ή ημίανοικτό, πεπερασμένο ή άπειρο) διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 5.1.1. *Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση.*

(α) Η f λέγεται κυρτή αν

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b) \tag{5.1.1}$$

για κάθε $a, b \in I$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < t < 1$. Η γεωμετρική σημασία του ορισμού είναι η εξής: η χορδή που έχει σαν άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ δεν είναι πουθενά κάτω από το γράφημα της f.

(β) Η f λέγεται γνησίως κυρτή αν

$$f((1-t)a+tb) < (1-t)f(a)+tf(b) \tag{5.1.2}$$

για κάθε $a, b \in I$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < t < 1$.

(γ) Η $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται κοίλη (αντίστοιχα, γνησίως κοίλη) αν η $-f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

Παρατήρηση 5.1.2. *Ισοδύναμοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να περιγραφεί η κυρτότητα της $f : I \to \mathbb{R}$ είναι οι εξής:*

(α) Αν $a, b, x \in I$ και $a < x < b$, τότε

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b). \tag{5.1.3}$$

Παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας ισούται με

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \tag{5.1.4}$$

(β) Αν $a, b \in I$ και αν $t, s > 0$ με $t + s = 1$, τότε

$$f(ta+sb) \leq tf(a)+sf(b). \tag{5.1.5}$$

Ορισμός 5.1.3 (επιγράφημα). *Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$. Το επιγράφημα της f είναι το σύνολο*

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x,t) \in I \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Η επόμενη πρόταση μας επιτρέπει να μελετάμε κυρτές συναρτήσεις μέσω κυρτών συνόλων και αντίστροφα (η απόδειξη είναι απλή και αφήνεται ως άσκηση):

Πρόταση 5.1.4. *Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν το $\mathrm{epi}(f)$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.*

Πρόταση 5.1.5 (το λήμμα των τριών χορδών). *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y < x < z$ στο I, τότε*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{5.1.6}$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι κυρτή, έχουμε

$$f(x) \leq \frac{z-x}{z-y} f(y) + \frac{x-y}{z-y} f(z). \tag{5.1.7}$$

Από αυτή την ανισότητα βλέπουμε ότι

$$f(x)-f(y) \leq \frac{y-x}{z-y} f(y) + \frac{x-y}{z-y} f(z) = \frac{x-y}{z-y}[f(z)-f(y)], \tag{5.1.8}$$

το οποίο αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα στην (5.1.6). Ξεκινώντας πάλι από την (5.1.7), γράφουμε

$$f(x)-f(z) \leq \frac{z-x}{z-y} f(y) + \frac{x-z}{z-y} f(z) = -\frac{z-x}{z-y}[f(z)-f(y)], \tag{5.1.9}$$

απ' όπου προκύπτει η δεξιά ανισότητα στην (5.1.6). □

Άμεση συνέπεια του λήμματος των τριών χορδών είναι η εξής.

Πόρισμα 5.1.6. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y < x < z < w$ στο I, τότε*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(w)-f(z)}{w-z}. \tag{5.1.10}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.1.5 για τα σημεία $y < x < z$, παίρνουμε

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{5.1.11}$$

Εφαρμόζοντας πάλι την Πρόταση 5.1.5 για τα σημεία $x < z < w$, παίρνουμε

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(w)-f(z)}{w-z}. \tag{5.1.12}$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 5.1.7. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x \in (a,b)$, τότε υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι*

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{και} \quad f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{5.1.13}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$ (με τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε για την αριστερή πλευρική παράγωγο $f'_-(x)$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_x : (x,b) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$g_x(z) := \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{5.1.14}$$

Η g_x είναι αύξουσα: αν $x < z_1 < z_2 < b$, το λήμμα των τριών χορδών δείχνει ότι

$$g_x(z_1) = \frac{f(z_1)-f(x)}{z_1-x} \leq \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x} = g_x(z_2). \tag{5.1.15}$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε τυχόν $y \in (a,x)$, το λήμμα των τριών χορδών (για τα $y < x < z$) δείχνει ότι

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = g_x(z) \tag{5.1.16}$$

για κάθε $z \in (x,b)$, δηλαδή η g_x είναι κάτω φραγμένη. Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{z\to x^+} g_x(z) = \lim_{z\to x^+} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{5.1.17}$$

Δηλαδή, υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$. □

Θεώρημα 5.1.8. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Οι πλευρικές παράγωγοι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b) και $f'_- \leq f'_+$ στο (a,b).*

Απόδειξη. Έστω $x < y$ στο (a,b). Για αρκετά μικρό θετικό h έχουμε $x \pm h, y \pm h \in (a,b)$ και $x+h < y-h$. Από την Πρόταση 5.1.5 και από το Λήμμα 5.1.6 βλέπουμε ότι

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(y)-f(y-h)}{h} \leq \frac{f(y+h)-f(y)}{h}. \tag{5.1.18}$$

Παίρνοντας όρια καθώς $h \to 0^+$, συμπεραίνουμε ότι

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y). \tag{5.1.19}$$

Οι ανισότητες $f'_-(x) \leq f'_-(y)$ και $f'_+(x) \leq f'_+(y)$ δείχνουν ότι οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b). Η αριστερή ανισότητα στην (5.1.20) δείχνει ότι $f'_- \leq f'_+$ στο (a,b). □

Η ύπαρξη των πλευρικών παραγώγων εξασφαλίζει ότι κάθε κυρτή συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο εσωτερικό του I:

Θεώρημα 5.1.9. *Κάθε κυρτή συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x \in (a,b)$. Τότε, για μικρά $h > 0$ έχουμε $x+h, x-h \in (a,b)$ και

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h \to f(x) + f'_+(x) \cdot 0 = f(x) \tag{5.1.21}$$

όταν $h \to 0^+$, ενώ, τελείως ανάλογα,

$$f(x-h) = f(x) + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \cdot (-h) \to f(x) + f'_-(x) \cdot 0 = f(x) \tag{5.1.22}$$

όταν $h \to 0^+$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x. □

Στον Απειροστικό Λογισμό δίνεται συχνά ένας διαφορετικός ορισμός της κυρτότητας για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in (a,b)$, θεωρούμε την εφαπτομένη

$$u = f(x) + f'(x)(u-x) \tag{5.1.23}$$

του γραφήματος της f στο $(x, f(x))$ και λέμε ότι η f είναι *κυρτή* στο (a,b) αν για κάθε $x \in (a,b)$ και για κάθε $y \in (a,b)$ έχουμε

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{5.1.24}$$

Δηλαδή, αν το γράφημα $\{(y, f(y)) : a < y < b\}$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι, αν περιοριστούμε στην κλάση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οι «δύο ορισμοί» συμφωνούν.

Θεώρημα 5.1.10. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) Η f είναι κυρτή.

(β) Η f' είναι αύξουσα.

(γ) Για κάθε $x,y \in (a,b)$ ισχύει η

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{5.1.25}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι κυρτή. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, έχουμε $f' = f'_- = f'_+$ στο (a,b). Από το Θεώρημα 5.1.8 οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες, άρα η f' είναι αύξουσα.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f' είναι αύξουσα. Έστω $x,y \in (a,b)$. Αν $x < y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x,y]$, βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x)$. Αφού $\xi > x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \geq f'(x)$. Αφού $y - x > 0$, έπεται ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{5.1.26}$$

Αν $x > y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[y,x]$, βρίσκουμε $\xi \in (y,x)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x)$. Αφού $\xi < x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \leq f'(x)$. Αφού $y - x < 0$, έπεται πάλι ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{5.1.27}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι η (5.1.25) ισχύει για κάθε $x,y \in (a,b)$ και θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x < y$ στο (a,b) και έστω $0 < t < 1$. Θέτουμε $z = (1-t)x + ty$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για τα ζευγάρια x,z και y,z, παίρνουμε

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z) \quad \text{και} \quad f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z). \tag{5.1.28}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + tf(y) &\geq (1-t)f(z) + tf(z) + f'(z)[(1-t)(x-z) + t(y-z)] \\ &= f(z) + f'(z)[(1-t)x + ty - z] \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty)$. □

Στην περίπτωση που η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b), η ισοδυναμία των (α) και (β) στο Θεώρημα 5.1.10 δίνει έναν απλό χαρακτηρισμό της κυρτότητας μέσω της δεύτερης παραγώγου.

Θεώρημα 5.1.11. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.*

Απόδειξη. Η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν $f'' \geq 0$ στο (a,b). Όμως, στο Θεώρημα 5.1.10 είδαμε ότι η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν η f είναι κυρτή. □

5.2 Κυρτές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Έστω C ένα μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Μία συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κυρτή* αν για κάθε $x_1, x_2 \in C$ και για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \tag{5.2.1}$$

Παρατηρήστε ότι $(1-t)x_1 + tx_2 \in C$ από την κυρτότητα του C. Με επαγωγή αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 5.2.1 (ανισότητα του Jensen). *Έστω C ένα μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x_1, \ldots, x_m \in C$ και $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_mx_m) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m). \tag{5.2.2}$$

5.2.1 Συνέχεια κυρτών συναρτήσεων

Ορισμός 5.2.2. *Έστω $f : C \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι Lipschitz συνεχής στο $D \subseteq C$ αν υπάρχει σταθερά $L > 0$ ώστε, για κάθε $y, z \in D$,*

$$|f(y) - f(z)| \leq L\|y - z\|_2. \tag{5.2.3}$$

Κάθε σταθερά $L > 0$ που ικανοποιεί την (5.2.3) λέγεται σταθερά Lipschitz για την f στο D.

Η f λέγεται τοπικά Lipschitz στο $x \in C$ αν υπάρχει $r > 0$ ώστε η f να είναι Lipschitz συνεχής στο $B(x,r) \cap C$. Σε αυτό τον ορισμό, η σταθερά Lipschitz μπορεί να εξαρτάται από το x και από το r.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Τότε, η f είναι τοπικά Lipschitz σε κάθε $x \in \mathrm{int}(C)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{int}(C)$. Θεωρούμε πρώτα $\delta > 0$ ώστε $\overline{B}(x,\delta) \subseteq C$ και βρίσκουμε αφινικά ανεξάρτητα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$ στη σφαίρα $S(x,\delta) = \{y : \|y - x\|_2 = \delta\}$ ώστε το x να ανήκει στο εσωτερικό του simplex $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$. Αφού κάθε $y \in S$ γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_n$, από την ανισότητα του Jensen έχουμε

$$f(y) \leq \alpha := \max\{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)\} \tag{5.2.4}$$

για κάθε $y \in S$. Ειδικότερα, $f(x) \leq \alpha$.

Επιλέγουμε $r > 0$ ώστε $B(x,2r) \subseteq \mathrm{int}(S)$. Για κάθε $y \in B(x,2r)$ έχουμε $2x - y \in B(x,2r)$ και $x = \frac{y+(2x-y)}{2}$. Από την κυρτότητα της f και από την (5.2.4) βλέπουμε ότι

$$f(x) \leq \frac{f(y) + f(2x-y)}{2} \leq \frac{f(y) + \alpha}{2}, \tag{5.2.5}$$

άρα

$$f(y) \geq 2f(x) - \alpha. \tag{5.2.6}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$|f(y)| \leq \gamma = \max\{\alpha, |2f(x) - \alpha|\} \tag{5.2.7}$$

για κάθε $y \in B(x,2r)$.

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι Lipschitz με σταθερά $2\gamma/r$ στο x: θεωρούμε την ανοικτή μπάλα $B(x,r)$ και τυχόντα $y \neq z$ στην $B(x,r)$. Υπάρχει $w \in B(x,2r)$ ώστε $z \in (y,w)$ και $\|w-z\|_2 = r$. Θεωρώντας την f ως κυρτή συνάρτηση στην ευθεία των y,z,w και εφαρμόζοντας το λήμμα των τριών χορδών, παίρνουμε

$$\frac{f(z)-f(y)}{\|y-z\|_2} \leq \frac{f(w)-f(z)}{\|w-z\|_2} \leq \frac{|f(w)|+|f(z)|}{r} \leq \frac{2\gamma}{r}. \tag{5.2.8}$$

Δηλαδή,

$$f(z)-f(y) \leq \frac{2\gamma}{r}\,\|y-z\|_2. \tag{5.2.9}$$

Λόγω συμμετρίας, έχουμε και την $f(y)-f(z) \leq \frac{2\gamma}{r}\,\|y-z\|_2$. Δηλαδή,

$$|f(z)-f(y)| \leq \frac{2\gamma}{r}\,\|y-z\|_2 \tag{5.2.10}$$

για κάθε $y,z \in B(x,r)$. □

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω C ένα μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Κάθε κυρτή συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathrm{int}(C)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{int}(C)$. Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχουν $r, M > 0$ ώστε

$$|f(y)-f(x)| \leq M\|y-x\|_2 \tag{5.2.11}$$

για κάθε $y \in B(x,r)$. Από την (5.2.11) ελέγχουμε εύκολα ότι αν $x_n \in C$ και $x_n \to x$ έχουμε τελικά $|f(x_n)-f(x)| \leq M\|x_n-x\|_2 \to 0$, δηλαδή $f(x_n) \to f(x)$. Έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x. □

5.2.2 Χαρακτηρισμός μέσω υπερεπιπέδων στήριξης

Ορισμός 5.2.5 (υπερεπίπεδο στήριξης)**.** *Έστω $f : C \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο $x \in C$ αν υπάρχει αφινική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής*

$$\alpha(y) = f(x) + \langle u, y-x\rangle, \tag{5.2.12}$$

όπου $u \in \mathbb{R}^n$, ώστε

$$f(y) \geq \alpha(y) = f(x) + \langle u, y-x\rangle \tag{5.2.13}$$

για κάθε $y \in C$. Παρατηρήστε ότι $\alpha(x) = f(x)$. Θα λέμε επίσης ότι η α στηρίζει την f στο x.

Θα αποδείξουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό για κυρτές συναρτήσεις $f : C \to \mathbb{R}$, στην περίπτωση που το C είναι ανοικτό.

Θεώρημα 5.2.6. *Έστω C μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η $f : C \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή αν και μόνο αν έχει υπερεπίπεδο στήριξης σε κάθε $x \in C$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δύο λήμματα. Το πρώτο είναι ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός για συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Λήμμα 5.2.7. *Έστω I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$. Η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή αν και μόνο αν έχει υπερεπίπεδο στήριξης σε κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή και θεωρούμε τυχόν $x \in I$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$ και $f(x) = f(0) = 0$. Για τυχόν $y \neq 0$ έχουμε ότι $ty, -sy \in I$ αν τα $t, s > 0$ είναι αρκετά μικρά. Από την κυρτότητα της f έπεται ότι

$$0 = f(0) = (t+s)f\left(\frac{s}{t+s}(ty) + \frac{t}{t+s}(-sy)\right) \leq sf(ty) + tf(-sy). \tag{5.2.14}$$

Δηλαδή,

$$\frac{f(ty)}{t} \geq -\frac{f(-sy)}{s}. \tag{5.2.15}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}$ ώστε $f(ty) \geq ut$ για κάθε $t > 0$ με $ty \in I$ και $f(-sy) \geq u(-s)$ για κάθε $s > 0$ με $-sy \in I$. Αν ορίσουμε $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\alpha(r) = \frac{ur}{y}$, τότε η α είναι γραμμική και

$$f(z) \geq \alpha(z)$$

για κάθε $z \in I$. Αφού $\alpha(0) = 0 = f(0)$, η α ορίζει υπερεπίπεδο στήριξης για την f στο $x = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι: για κάθε $x \in I$ υπάρχει αφινική συνάρτηση $\alpha_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$\alpha_x(y) = f(x) + u_x(y - x), \tag{5.2.16}$$

όπου $u_x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$f(y) \geq \alpha_x(y) \tag{5.2.17}$$

για κάθε $y \in I$. Παρατηρήστε ότι

$$f(y) = g(y) := \max\{\alpha_x(y) : x \in I\} \tag{5.2.18}$$

για κάθε $y \in I$. Η (5.2.18) ισχύει διότι $f(y) \geq \alpha_x(y)$ για κάθε $x \in I$ από την (5.2.17), και $\alpha_y(y) = f(y)$. Έτσι, η $f \equiv g$ έχει τώρα γραφτεί στη μορφή supremum μίας οικογένειας αφινικών συναρτήσεων, απ' όπου έπεται εύκολα ότι είναι κυρτή (γενικότερα, το κατά σημείο supremum μίας οικογένειας κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση). □

Λήμμα 5.2.8. *Έστω C μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Έστω $x \in \mathrm{int}(C)$ και έστω H αφινικός υπόχωρος με $x \in H$. Αν η $f|_H$ έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο x που ορίζεται από την αφινική συνάρτηση $\alpha_H : H \to \mathbb{R}$, τότε η f έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο x που ορίζεται από μία αφινική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\alpha|_H = \alpha_H$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$ και $f(x) = f(0) = 0$. Τότε, ο H είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\dim(H) = k < n$. Θα δείξουμε ότι για $p = k+1, \ldots, n$ υπάρχουν υπόχωρος $H_p \supseteq H_{p-1}$ με $\dim(H_p) = p$ και γραμμική συνάρτηση $\alpha_p : H_p \to \mathbb{R}$ ώστε $\alpha_p|_H = \alpha_H$ και η α_p να «στηρίζει την f στο x». Στο βήμα $p = n$ εξασφαλίζουμε το ζητούμενο.

Έστω ότι έχουν οριστεί ο H_p και η α_p. Αν $p < n$ τότε μπορούμε να βρούμε $w \in C \setminus H_p$. Θέτουμε $H_{p+1} = \mathrm{span}(\{H_p, w\})$. Κάθε $u \in H_{p+1}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $u = v + tw$, όπου $v \in H_p$ και $t \in \mathbb{R}$. Θα επιλέξουμε $\rho \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε, αν ορίσουμε τη γραμμική συνάρτηση $\alpha_{p+1} : H_{p+1} \to \mathbb{R}$ με

$$\alpha_{p+1}(u) = \alpha_{p+1}(v + tw) = \alpha_p(v) + t\rho, \tag{5.2.19}$$

τότε η α_{p+1} στηρίζει την $f|_{C \cap H_{p+1}}$ στο x.

Ο περιορισμός για το ρ είναι ο εξής: αν το $v \in H_p$ και ο $t \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν την $v + tw \in C$, τότε

$$\alpha_p(v) + t\rho \leq f(v + tw). \tag{5.2.20}$$

Ισοδύναμα, ζητάμε: αν $t > 0$, $v_1 \in H_p$ και $v_1 + tw \in C$ τότε

$$\rho \leq \frac{f(v_1 + tw) - \alpha_p(v_1)}{t}, \tag{5.2.21}$$

ενώ αν $s > 0$, $v_2 \in H_p$ και $v_2 - sw \in C$ τότε $\alpha_p(v_2) - s\rho \leq f(v_2 - sw)$, δηλαδή

$$\rho \geq \frac{\alpha_p(v_2) - f(v_2 - sw)}{s}. \tag{5.2.22}$$

Η επιλογή του ρ είναι δυνατή αν δείξουμε το εξής: αν $t, s > 0$, $v_1, v_2 \in H_p$ και $v_1 + tw, v_2 - sw \in C$, τότε

$$\frac{\alpha_p(v_2) - f(v_2 - sw)}{s} \leq \frac{f(v_1 + tw) - \alpha_p(v_1)}{t}. \tag{5.2.23}$$

Όμως, από την κυρτότητα της f και την γραμμικότητα της α_p έχουμε

$$\begin{aligned} sf(v_1 + tw) + tf(v_2 - sw) &\geq (t+s)f\left(\frac{sv_1 + stw}{t+s} + \frac{tv_2 - tsw}{t+s}\right) \\ &= (t+s)f\left(\frac{sv_1 + tv_2}{t+s}\right) \geq (t+s)\alpha_p\left(\frac{sv_1 + tv_2}{t+s}\right) \\ &= s\alpha_p(v_1) + t\alpha_p(v_2), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$s(f(v_1 + tw) - \alpha_p(v_1)) \geq t(\alpha_p(v_2) - f(v_2 - sw)). \tag{5.2.24}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup_{v_2 - sw \in C} \frac{\alpha_p(v_2) - f(v_2 - sw)}{s} \leq \rho \leq \inf_{v_1 + tw \in C} \frac{f(v_1 + tw) - \alpha_p(v_1)}{t}, \tag{5.2.25}$$

και επιτρέπει το επαγωγικό βήμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.6. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή και θεωρούμε τυχόν $x \in C$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$ και $f(x) = f(0) = 0$.

Παίρνουμε τυχούσα ευθεία H_1 που περνάει από το 0. Ο περιορισμός της f στο $C \cap H_1$ είναι κυρτή συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.7 βρίσκουμε γραμμική συνάρτηση $\alpha_1 : H_1 \to \mathbb{R}$ η οποία στηρίζει την $f|_{C \cap H_1}$ στο x. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.8 επεκτείνουμε την α_1 σε γραμμική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία στηρίζει την f στο x.

Ο αντίστροφος ισχυρισμός μπορεί να αποδειχθεί ακριβώς όπως αποδείχτηκε στη μονοδιάστατη περίπτωση (συμβουλευτείτε το δεύτερο μέρος της απόδειξης του Λήμματος 5.2.7). □

5.2.3 Διαφορισιμότητα κυρτών συναρτήσεων

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με την «ιδιαίτερη συμπεριφορά» των κυρτών συναρτήσεων ως προς την διαφορισιμότητα.

Θεώρημα 5.2.9. *Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και έστω $x \in \mathrm{int}(C)$. Τότε, η f είναι διαφορίσιμη στο x αν και μόνο αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \ldots, n$.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x αν υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$f(y) = f(x) + \langle u, y - x\rangle + o(\|y - x\|_2)$$

καθώς το $y \to x$: ο συμβολισμός $o(\|y - x\|_2)$ σημαίνει ότι

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - \langle u, y - x\rangle}{\|y - x\|_2} = 0. \tag{5.2.26}$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x, παίρνοντας $y = x + te_i$ και $t \to 0$, βλέπουμε ότι, για κάθε $i = 1, \dots, n$, υπάρχει η

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = u_i. \tag{5.2.27}$$

Με άλλα λόγια, $u = \nabla f(x)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$. Θέτουμε

$$u_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.2.28}$$

Από τον ορισμό των μερικών παραγώγων έχουμε

$$f(x + te_i) = f(x) + u_i t + o(|t|), \quad t \to 0. \tag{5.2.29}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f(y) = f(x + y - x) &= f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x + n(y_i - x_i)e_i)\right) \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x + n(y_i - x_i)e_i) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^n u_i(y_i - x_i) + o(\|y - x\|_2) \\ &= f(x) + \langle u, y - x\rangle + o(\|y - x\|_2) \end{aligned}$$

όταν $y \to x$. Όμοια, αν το $y \in C$ είναι αρκετά κοντά στο x, έχουμε $2x - y \in C$ και $2x - y = x - (y - x)$, άρα

$$f(2x - y) \leq f(x) - \langle u, y - x\rangle + o(\|y - x\|_2) \tag{5.2.30}$$

όταν $y \to x$. Αφού $2f(x) \leq f(2x - y) + f(y)$ από την κυρτότητα της f, παίρνουμε

$$f(y) \geq 2f(x) - f(2x - y) = f(x) + \langle u, y - x\rangle + o(\|y - x\|_2) \tag{5.2.31}$$

όταν $y \to x$. Έπεται ότι

$$f(y) = f(x) + \langle u, y - x\rangle + o(\|y - x\|_2), \tag{5.2.32}$$

δηλαδή η f είναι διαφορίσιμη στο x. □

Παρατήρηση 5.2.10. *Αποδεικνύεται ότι κάθε κυρτή συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη (θεώρημα Reidemeister). Ακόμα ισχυρότερα, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σχεδόν παντού (θεώρημα Alexandrov): για σχεδόν κάθε $x \in C$ (με την έννοια του Lebesgue) υπάρχει $n \times n$ πίνακας H, η Εσσιανή της f στο x, ώστε*

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle H(y - x), y - x\rangle + o(\|y - x\|_2^2) \tag{5.2.33}$$

όταν $y \to x$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η διαφορισιμότητα μίας κυρτής συνάρτησης $f : C \to \mathbb{R}$ στο $x \in \mathrm{int}(C)$ είναι ισοδύναμη με τη μοναδικότητα του υπερεπιπέδου στήριξης της f στο x.

Θεώρημα 5.2.11. *Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και έστω $x \in \mathrm{int}(C)$. Τότε, η f είναι διαφορίσιμη στο x αν και μόνο αν υπάρχει μοναδική αφινική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε $\alpha(x) = f(x)$ και $f(y) \geq \alpha(y)$ για κάθε $y \in C$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x. Έχουμε δει ότι υπάρχουν αφινικές συναρτήσεις οι οποίες στηρίζουν την f στο x. Έστω

$$\alpha(y) = f(x) + \langle u, y - x\rangle \tag{5.2.34}$$

κάποια από αυτές. Σταθεροποιούμε $i \leq n$ και παίρνουμε $y = x \pm te_i \in C, t > 0$. Έχουμε

$$f(x + te_i) \geq f(x) + tu_i, \tag{5.2.35}$$

οπότε αφαιρώντας το $f(x)$, διαιρώντας με t και αφήνοντας το $t \to 0^+$, βλέπουμε ότι

$$u_i \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \tag{5.2.36}$$

Με τον ίδιο τρόπο, θεωρώντας $y = x - te_i$, παίρνουμε

$$u_i \geq \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x - te_i) - f(x)}{-t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \tag{5.2.37}$$

Έπεται ότι $u = \nabla f(x)$, δηλαδή η α είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο x. Από το Θεώρημα 5.2.9 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $i \leq n$ ώστε να μην υπάρχει η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Η συνάρτηση $g_i(t) = f(x + te_i)$ είναι κυρτή, άρα υπάρχουν οι «πλευρικές μερικές παράγωγοι» $\frac{\partial f}{\partial x_i}^-(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}^+(x)$ και ισχύει

$$b_i^- := \frac{\partial f}{\partial x_i}^-(x) < b_i^+ := \frac{\partial f}{\partial x_i}^+(x). \tag{5.2.38}$$

Αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε $r \in \mathbb{R}$ με $b_i^- < r < b_i^+$, η αφινική συνάρτηση $\alpha_{i,r}(x + te_i) = f(x) + rt$ στηρίζει τον περιορισμό της f στο $C \cap \{x + te_i : t \in \mathbb{R}\}$ στο σημείο x. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.8 μπορούμε να επεκτείνουμε την $\alpha_{i,r}$ σε μία αφινική συνάρτηση $\alpha_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία στηρίζει την f στο x. Έτσι, η f έχει περισσότερα από ένα υπερεπίπεδα στήριξης στο x (τουλάχιστον ένα για κάθε $r \in (b_i^-, b_i^+)$). □

Τέλος, δείχνουμε ότι μία κυρτή συνάρτηση που είναι ορισμένη σε ανοικτό κυρτό σύνολο και είναι παντού διαφορίσιμη είναι αναγκαστικά C^1 (έχει συνεχείς μερικές παραγώγους).

Θεώρημα 5.2.12. *Έστω C μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $f : C \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση διαφορίσιμη παντού στο C, τότε οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς στο C, δηλαδή η f ανήκει στην κλάση C^1.*

Απόδειξη. Έστω $x \in C$. Υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύουν τα εξής: $B(x, r) \subseteq C$ και υπάρχει $L > 0$ ώστε

$$|f(y) - f(z)| \leq L\|y - z\|_2 \tag{5.2.39}$$

για κάθε $y, z \in B(x, r)$.

Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_m) στο C με $x_m \to x$ και δείχνουμε ότι $\nabla f(x_m) \to \nabla f(x)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_m \in B(x,r)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $u_m = \nabla f(x_m)$ και $u = \nabla f(x)$. Δείχνουμε πρώτα ότι η (u_m) είναι φραγμένη: για κάθε m έχουμε

$$f(y) \geq f(x) + \langle u_m, y - x\rangle, \quad y \in C. \tag{5.2.40}$$

Για τυχόν m θεωρούμε $y_m \in B(x,r)$ ώστε το $y_m - x_m$ να είναι ομόρροπο με το u_m. Χρησιμοποιώντας τις (5.2.39) και (5.2.40) βλέπουμε ότι

$$\|u_m\|_2\|y_m - x_m\|_2 = \langle u_m, y_m - x_m\rangle \leq f(y_m) - f(x_m) \leq L\|y_m - x_m\|_2, \tag{5.2.41}$$

άρα

$$\|u_m\|_2 \leq L. \tag{5.2.42}$$

Θεωρούμε τώρα τυχούσα συγκλίνουσα υπακολουθία της (u_m): ας υποθέσουμε ότι $u_{k_m} \to v$. Για κάθε $y \in C$ και για κάθε m έχουμε

$$f(y) \geq f(x_{k_m}) + \langle u_{k_m}, y - x_{k_m}\rangle. \tag{5.2.43}$$

Παίρνοντας όριο, βλέπουμε ότι

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle. \tag{5.2.44}$$

Αφού το $y \in C$ ήταν τυχόν, η $\alpha(y) = f(x) + \langle v, y - x\rangle$ στηρίζει την f στο x. Όμως, η f είναι διαφορίσιμη στο x. Από το Θεώρημα 5.2.11 έπεται ότι

$$v = u = \nabla f(x). \tag{5.2.45}$$

Είδαμε ότι κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία της φραγμένης ακολουθίας $(\nabla f(x_m))$ συγκλίνει στο $\nabla f(x)$. Έπεται ότι $\nabla f(x_m) \to \nabla f(x)$. □

5.2.4 Επιγράφημα κυρτής συνάρτησης

Ορισμός 5.2.13. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το επιγράφημα της f είναι το σύνολο*

$$\mathrm{epi}(f) = \{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq f(y)\}. \tag{5.2.45}$$

Από τους ορισμούς της κυρτής συνάρτησης και του επιγραφήματος ελέγχουμε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν το επιγράφημα $\mathrm{epi}(f)$ είναι κυρτό σύνολο. Παίρνοντας υπ' όψιν και το Θεώρημα 5.2.4 έχουμε το εξής.

Θεώρημα 5.2.14. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Το επιγράφημα $\mathrm{epi}(f)$ της f είναι κυρτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$.* □

Θεωρούμε τώρα μία κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι $(y, f(y)) \in \mathrm{bd}(\mathrm{epi}(f))$. Από το Θεώρημα 5.2.14, το $\mathrm{epi}(f)$ είναι κλειστό και κυρτό. Συνεπώς, υπάρχει υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{n+1}$ το οποίο στηρίζει το $\mathrm{epi}(f)$ στο σημείο $(y, f(y))$. Με άλλα λόγια, υπάρχουν $x \in \mathbb{R}^n$ και $b, \alpha \in \mathbb{R}$ με $(x,b) \neq (0,0)$, ώστε

$$\langle x, z\rangle + bt \geq \alpha \tag{5.2.46}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t \geq f(z)$, ενώ

$$\langle x, y\rangle + bf(y) = \alpha. \tag{5.2.47}$$

Παρατηρούμε ότι $b > 0$. Πράγματι, ας υποθέσουμε πρώτα ότι $b < 0$: τότε, αφήνοντας το $t \to +\infty$ στην (5.2.46) καταλήγουμε σε άτοπο. Αν πάλι $b = 0$, τότε έχουμε $\langle x, z\rangle \geq \alpha$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $x = 0$, το οποίο επίσης οδηγεί σε άτοπο: τότε, θα είχαμε $(x, b) = (0, 0)$.

Αντικαθιστώντας τα x και α με τα x/b και α/b αντίστοιχα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b = 1$ στις (5.2.46) και (5.2.47). Αντικαθιστώντας εκ νέου το x με το $-x$, έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.2.15. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Υπάρχουν $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$\langle x, y\rangle + \alpha = f(y) \tag{5.2.48}$$

και

$$\langle x, z\rangle + \alpha \leq f(z) \tag{5.2.49}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. □

5.3 Συνάρτηση στήριξης και συνάρτηση στάθμης

5.3.1 Συνάρτηση στήριξης

Έστω K μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε μη μηδενικό $y \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε την απεικόνιση $x \to \langle x, y\rangle$. Αφού το K είναι συμπαγές, ορίζονται οι $\alpha_y = \max\{\langle x, y\rangle : x \in K\}$ και $\beta_y = \min\{\langle x, y\rangle : x \in K\}$. Τα υπερεπίπεδα

$$H(y, \alpha_y) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \alpha_y\} \tag{5.3.1}$$

και

$$H(y, \beta_y) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \beta_y\} \tag{5.3.2}$$

στηρίζουν το K. Ορίζουμε μία συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ απεικονίζοντας κάθε y στον α_y.

Ορισμός 5.3.1 (συνάρτηση στήριξης)**.** *Έστω K μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση στήριξης (support function) $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του K ορίζεται από την*

$$h_K(y) = \max\{\langle x, y\rangle : x \in K\}. \tag{5.3.3}$$

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τον κύβο $Q_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1 \text{ για κάθε } i \leq n\}$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $x \in Q_n$ έχουμε

$$\langle x, y\rangle \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \max_{i \leq n} |x_i| \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i|, \tag{5.3.4}$$

άρα $h_{Q_n}(y) \leq \sum_{i=1}^n |y_i|$. Επιπλέον, αν $x_i = \mathrm{sgn}(y_i)$, τότε $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q_n$ και

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \mathrm{sgn}(y_i) y_i = \sum_{i=1}^n |y_i|. \tag{5.3.5}$$

Συνεπώς,

$$h_{Q_n}(y) = \sum_{i=1}^n |y_i|. \tag{5.3.6}$$

(β) Θεωρούμε το $K = B_1^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}$. (Το K είναι πολύτοπο με κορυφές τα $\pm e_i$, $i = 1, \dots, n$. Για $n = 2$ είναι ρόμβος, για $n = 3$ οκτάεδρο). Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle x, y\rangle \leq \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \max_{i \leq n} |y_i| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|, \tag{5.3.7}$$

άρα $h_K(y) \leq \max_{i \leq n} |y_i|$. Επιπλέον, αν $\max |y_i| = |y_{i_0}|$ και $x = (\mathrm{sgn} y_{i_0}) e_{i_0}$, τότε $x \in K$ και $\langle y, x\rangle = |y_{i_0}|$. Άρα,

$$h_K(y) = \max_{i \leq n} |y_i|. \tag{5.3.8}$$

(γ) Έστω $1 < p < \infty$ και έστω q ο *συζυγής εκθέτης* του p, ο οποίος ορίζεται από την $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (παρατηρήστε ότι $1 < q < \infty$ και $p(q-1) = q$). Θεωρούμε το $K = B_p^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq 1 \right\}$. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$ και έστω $\|y\|_q^q := \sum_{i=1}^n |y_i|^q$. Για κάθε $x \in K$, η ανισότητα του Hölder δείχνει ότι

$$\langle x, y\rangle \leq \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \|y\|_q, \tag{5.3.9}$$

άρα $h_K(y) \leq \|y\|_q$. Αν $y \neq 0$ και αν ορίσουμε $x = (x_1, \dots, x_n)$ όπου $x_i = |y_i|^{q-1} \mathrm{sgn}(y_i) / \|y\|_q^{q/p}$, τότε

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{\|y\|_q^{q/p}} \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \|y\|_q^{q - q/p} = \|y\|_q \tag{5.3.10}$$

και

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^p = \frac{1}{\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^n |y_i|^{p(q-1)} = \frac{1}{\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q = 1, \tag{5.3.11}$$

δηλαδή, $x \in K$. Άρα,

$$h_K(y) = \max_{x \in K} \langle x, y\rangle = \|y\|_q. \tag{5.3.12}$$

Οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης στήριξης περιγράφονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 5.3.2. *(α) Έστω K μη κενό κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η h_K είναι κυρτή και θετικά ομογενής.*

(β) $h_{\lambda K} = \lambda h_K$ για κάθε $\lambda > 0$.

(γ) Αν K_1 και K_2 είναι μη κενά κυρτά και συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε $h_{K_1+K_2} = h_{K_1} + h_{K_2}$.

Απόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι η h_K είναι υπογραμμική. Έστω $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle \leq h_K(y_1) + h_K(y_2). \tag{5.3.13}$$

Άρα,

$$h_K(y_1 + y_2) = \max_{x\in K}\langle x, y_1 + y_2\rangle \leq h_K(y_1) + h_K(y_2). \tag{5.3.14}$$

Αν $y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda > 0$, τότε

$$h_K(\lambda y) = \max_{x\in K}\langle x, \lambda y\rangle = \max_{x\in K} \lambda\langle x, y\rangle = \lambda \max_{x\in K}\langle x, y\rangle = \lambda h_K(y), \tag{5.3.15}$$

άρα η h_K είναι θετικά ομογενής. Αφού η h_K είναι υπογραμμική και θετικά ομογενής, συμπεραίνουμε ότι η h_K είναι κυρτή.

(β) Έστω $\lambda > 0$. Τότε,

$$h_{\lambda K}(y) = \max_{x\in \lambda K}\langle x, y\rangle = \max_{x\in K}\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \max_{x\in K}\langle x, y\rangle = \lambda h_K(y), \tag{5.3.16}$$

άρα $h_{\lambda K} = \lambda h_K$.

(γ) Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} h_{K_1+K_2}(y) &= \max\{\langle y, x_1 + x_2\rangle : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\} \\ &= \max\{\langle y, x_1\rangle + \langle y, x_2\rangle : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\} \\ &= \max\{\langle y, x_1\rangle : x_1 \in K_1\} + \max\{\langle y, x_2\rangle : x_2 \in K_2\} \\ &= h_{K_1}(y) + h_{K_2}(y). \end{aligned}$$

Άρα, $h_{K_1+K_2} = h_{K_1} + h_{K_2}$. □

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η συνάρτηση στήριξης του K προσδιορίζει το K. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 5.3.3. *Αν K_1, K_2 είναι μη κενά, κυρτά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε $K_1 \subseteq K_2$ αν και μόνο αν $h_{K_1} \leq h_{K_2}$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της συνάρτησης στήριξης βλέπουμε εύκολα ότι αν $K_1 \subseteq K_2$ τότε

$$h_{K_1}(y) = \max_{x\in K_1}\langle x, y\rangle \leq \max_{x\in K_2}\langle x, y\rangle = h_{K_2}(y) \tag{5.3.17}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $h_{K_1} \leq h_{K_2}$ αλλά υπάρχει $x \in K_1$ με $x \notin K_2$. Τότε τα x, K_2 χωρίζονται αυστηρά, δηλαδή υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\langle z, y\rangle < \langle x, y\rangle$ για κάθε $z \in K_2$. Τότε,

$$h_{K_2}(y) = \max\{\langle z, y\rangle : z \in K_2\} < \langle x, y\rangle \leq h_{K_1}(y), \tag{5.3.18}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πόρισμα 5.3.4. *Αν K είναι μη κενό κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε $0 \in K$ αν και μόνο αν $h_K \geq 0$.*

Απόδειξη. $h_{\{0\}} = 0$. □

Πόρισμα 5.3.5. *Η συνάρτηση στήριξης καθορίζει το σύνολο K. Δηλαδή, αν K_1, K_2 είναι μη κενά κυρτά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $h_{K_1} = h_{K_2}$, τότε $K_1 = K_2$.* □

Στην ειδική περίπτωση που το K είναι συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης στήριξης αποδεικνύουν το εξής.

Πρόταση 5.3.6. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση στήριξης h_K είναι νόρμα, και δίνεται από την*

$$h_K(y) = \max_{x \in K} |\langle x, y\rangle| \tag{5.3.19}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Αφού $0 \in K$ έχουμε $h_K(y) \geq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Από τη συμμετρία του K και το γεγονός ότι έχει μη κενό εσωτερικό, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(0,r) \subset K$ (άσκηση). Έπεται ότι: αν $y \neq 0$ τότε

$$h_K(y) \geq \max_{x \in B(0,r)} \langle x, y\rangle = r\|y\|_2 > 0. \tag{5.3.20}$$

Επίσης,

$$h_K(-y) = \max_{x \in K}\langle x, -y\rangle = \max_{x \in K}\langle -x, -y\rangle = \max_{x \in K}\langle x, y\rangle = h_K(y). \tag{5.3.21}$$

Αφού η h_K είναι θετικά ομογενής, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$h_K(ty) = |t| h_K(y) \tag{5.3.22}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$. Η τριγωνική ανισότητα έχει ήδη αποδειχθεί, άρα η h_K είναι νόρμα.

Τέλος, πάλι από τη συμμετρία του K, έχουμε $\pm\langle x, y\rangle = \langle \pm x, y\rangle \leq h_K(y)$ για κάθε $x \in K$, οπότε

$$\max_{x \in K} |\langle x, y\rangle| \leq h_K(y) \tag{5.3.23}$$

κι αυτό αποδεικνύει την (5.3.19). □

Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της υποπαραγράφου δίνει ένα χαρακτηρισμό της κλάσης των συναρτήσεων στήριξης: μία συνάρτηση $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση στήριξης κάποιου μη κενού συμπαγούς κυρτού συνόλου αν και μόνο αν είναι κυρτή και θετικά ομογενής.

Θεώρημα 5.3.7. *Έστω $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή και θετικά ομογενής. Τότε υπάρχει (μοναδικό) κυρτό συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ ώστε $h_K = h$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \leq h(y) \quad \text{για κάθε} \quad y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{5.3.24}$$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \leq h(y)\}$ είναι ημίχωρος (ή ολόκληρος ο $\mathbb{R}^n$). Συνεπώς, το K είναι κυρτό ως τομή κυρτών συνόλων.

Επειδή η h είναι συνεχής, το K είναι κλειστό. Επιπλέον, είναι συμπαγές, αφού για κάθε $x \in K$ και για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ισχύει

$$-h(-e_i) \leq -\langle -e_i, x\rangle = x_i = \langle e_i, x\rangle \leq h(e_i). \tag{5.3.25}$$

Θεωρούμε τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$. Αφού η h είναι κυρτή, από το Θεώρημα 5.2.15 υπάρχουν $x \neq 0$ στον $\mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle x, y\rangle + \alpha = h(y) \tag{5.3.26}$$

και

$$\langle x, z\rangle + \alpha \leq h(z) \tag{5.3.27}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Αφού η h είναι θετικά ομογενής, από την (5.3.27) παίρνουμε

$$\alpha \leq t\,(h(z) - \langle x, z\rangle) \tag{5.3.28}$$

για κάθε $t > 0$. Σταθεροποιώντας z (για παράδειγμα το y) και αφήνοντας το $t \to 0^+$, βλέπουμε ότι $\alpha \leq 0$. Αφήνοντας τώρα το $t \to +\infty$ στην (5.3.28), βλέπουμε ότι

$$\langle x, z\rangle \leq h(z) \tag{5.3.29}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή $x \in K$. Ειδικότερα, το K είναι μη κενό.

Ας υποθέσουμε ότι $\alpha < 0$. Επιστρέφοντας στην (5.3.26) παίρνουμε

$$\langle x, y\rangle > \langle x, y\rangle + \alpha = h(y), \tag{5.3.30}$$

το οποίο είναι άτοπο από την (5.3.29). Άρα, $\alpha = 0$. Όμως τότε, οι (5.3.26) και (5.3.27) δείχνουν ότι

$$h_K(y) = \max_{z\in K}\langle z, y\rangle = \langle x, y\rangle = h(y). \tag{5.3.31}$$

Το y ήταν τυχόν, άρα $h_K = h$.

Αν M είναι ένα άλλο μη κενό, κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $h_M = h$, τότε $h_K = h_M$ και το Πόρισμα 5.3.5 δείχνει ότι $M = K$. Δηλαδή, το K είναι το μοναδικό συμπαγές κυρτό σύνολο που έχει ως συνάρτηση στήριξης την h. □

5.3.2 Συνάρτηση στάθμης

Έστω L κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(L)$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda > 0$ ώστε $x \in \lambda L$: αν $r > 0$ με $B(0, r) \subseteq L$ και αν $\lambda > \|x\|_2/r$, έχουμε $x \in \lambda L$.

Ορισμός 5.3.8 (συνάρτηση στάθμης). *Έστω L κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(L)$. Η συνάρτηση στάθμης (gauge function) $g_L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του L ορίζεται από την*

$$g_L(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda L\}. \tag{5.3.32}$$

Παρατήρηση 5.3.9. *(α) Αφού το L είναι κυρτό, αν $x \in \lambda L$ τότε $x \in \mu L$ για κάθε $\mu > \lambda$. Πράγματι, $x = \lambda z$ για κάποιο $z \in L$, άρα*

$$x = \mu\left(\frac{\lambda}{\mu}z + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)0\right) \in \mu L. \tag{5.3.33}$$

Συνεπώς, το σύνολο $\Lambda = \{\lambda > 0 : x \in \lambda L\}$ *έχει τη μορφή* $(a, +\infty)$ *ή* $[a, +\infty)$*, όπου* $a \geq 0$.

Αν $a > 0$*, τότε το σύνολο* Λ *είναι κλειστό: έστω* $\lambda_n \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$ *με* $\lambda_n \to \lambda$*. Υπάρχουν* $z_n \in L$ *ώστε* $x = \lambda_n z_n$*. Αφού* $\lambda \geq a > 0$*, ισχύει* $z_n \to x/\lambda$*. Αφού το* L *είναι κλειστό, ισχύει* $x/\lambda \in L$*, άρα* $\lambda \in \Lambda$.

Συνεπώς, το Λ *έχει τη μορφή* $(0, +\infty)$ *ή* $[a, +\infty)$, $a > 0$.

(β) Από τον ορισμό βλέπουμε ότι αν L_1, L_2 *είναι δύο κλειστά κυρτά υποσύνολα του* $\mathbb{R}^n$ *που το εσωτερικό τους περιέχει το* 0*, τότε* $L_1 \subseteq L_2$ *αν και μόνο αν* $g_{L_2} \leq g_{L_1}$ *(δείτε και την απόδειξη της Πρότασης 5.3.11 παρακάτω).*

Οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης στάθμης περιγράφονται από την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 5.3.10. *Έστω* L *κλειστό κυρτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$ *με* $0 \in \mathrm{int}(L)$*. Τότε:*

(α) $g_L(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$.

(β) $g_L(x) = 0$ *αν και μόνο αν* $\lambda x \in L$ *για κάθε* $\lambda > 0$*. Ειδικότερα,* $g_L(0) = 0$.

(γ) $g_{\mu L} = \frac{1}{\mu} g_L$ *για κάθε* $\mu > 0$.

(δ) $L = \{x \in \mathbb{R}^n : g_L(x) \leq 1\}$.

(ε) Γενικότερα, $\mu L = \{x \in \mathbb{R}^n : g_L(x) \leq \mu\}$ *για κάθε* $\mu > 0$.

(στ) Η g_L *είναι θετικά ομογενής.*

(ζ) Η g_L *είναι κυρτή.*

Απόδειξη. (α) Προφανές από τον ορισμό της g_L.

(β) Έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 5.3.9.

(γ) Παρατηρούμε ότι

$$g_{\mu L}(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \mu L\} = \inf\left\{\frac{\rho}{\mu} > 0 : x \in \rho L\right\} = \frac{1}{\mu} g_L(x). \tag{5.3.34}$$

(δ)-(ε) Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ με $g_L(x) \leq \mu$. Αν $g_L(x) = 0$, τότε $\lambda x \in L$ για κάθε $\lambda > 0$, άρα $x \in \mu L$. Αν $g_L(x) > 0$, από την Παρατήρηση 5.3.9 έπεται ότι το σύνολο Λ έχει τη μορφή $[a, +\infty)$, όπου $a = g_L(x)$. Έπεται ότι $x \in g_L(x) L \subseteq \mu L$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής από τον ορισμό της g_L.

(στ) Για κάθε $\mu > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} g_L(\mu x) &= \inf\{\lambda > 0 : \mu x \in \lambda L\} = \inf\{\lambda > 0 : x \in (\lambda/\mu) L\} \\ &= \inf\{\rho\mu > 0 : x \in \rho L\} = \mu g_L(x). \end{aligned}$$

(ζ) Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ και έστω $t \in (0, 1)$. Θα δείξουμε ότι

$$g_L((1-t)x + ty) \leq (1-t) g_L(x) + t g_L(y). \tag{5.3.35}$$

Αν το δεξιό μέλος είναι ίσο με 0, τότε $x \in \lambda L$ και $y \in \lambda L$ για κάθε $\lambda > 0$. Άρα, $(1-t)x + ty \in \lambda L$ για κάθε $\lambda > 0$, απ' όπου έπεται ότι $g_L(tx + (1-t)y) = 0$.

Έστω ότι το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι θετικό. Υπάρχουν $\lambda_n > 0$, $\mu_n > 0$ ώστε $x \in \lambda_n L$, $y \in \mu_n L$ και

$$\lambda_n \to g_L(x), \quad \mu_n \to g_L(y). \tag{5.3.36}$$

Τότε, $(1-t)x + ty \in ((1-t)\lambda_n + t\mu_n)L$, δηλαδή

$$g_L((1-t)x + ty) \leq (1-t)\lambda_n + t\mu_n. \tag{5.3.37}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε την (5.3.35). □

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι η συνάρτηση στάθμης g_L προσδιορίζει το L.

Πρόταση 5.3.11. *Αν K, L κυρτά κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K) \cap \mathrm{int}(L)$ και $g_K = g_L$, τότε $K = L$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.3.10(δ) έχουμε

$$K = \{x : g_K(x) \leq 1\} = \{x : g_L(x) \leq 1\} = L, \tag{5.3.38}$$

αφού $g_K(x) \leq 1$ αν και μόνο αν $g_L(x) \leq 1$. □

Στην ειδική περίπτωση που το K είναι συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης στάθμης αποδεικνύουν το εξής.

Πρόταση 5.3.12. *Έστω L συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση στάθμης g_L είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Αφού η g_L είναι μη αρνητική, θετικά ομογενής και κυρτή, αρκεί να δείξουμε ότι $g_L(-x) = g_L(x)$ και ότι $g_L(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση: ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει από τη συμμετρία του L ως προς το 0 και ο δεύτερος από το γεγονός ότι το L περιέχει τη μπάλα $B(0,r)$ για κάποιον $r > 0$. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της υποπαραγράφου δίνει ένα χαρακτηρισμό της κλάσης των συναρτήσεων στάθμης: μία συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση στάθμης κάποιου κλειστού κυρτού συνόλου που το εσωτερικό του περιέχει το 0 αν και μόνο αν είναι μη αρνητική, κυρτή και θετικά ομογενής.

Θεώρημα 5.3.13. *Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μη αρνητική θετικά ομογενής κυρτή συνάρτηση. Θέτουμε $L = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 1\}$. Τότε το L είναι κυρτό και κλειστό, $0 \in \mathrm{int}(L)$ και $g = g_L$.*

Απόδειξη. Το L είναι κυρτό ως σύνολο στάθμης κυρτής συνάρτησης. Επίσης είναι κλειστό, αφού η g είναι συνεχής.

Αφού η g είναι θετικά ομογενής, ισχύει $g(0) = 0$ και η συνέχεια της g συνεπάγεται ότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 1\}$ είναι ανοικτό. Άρα, $0 \in \mathrm{int}(L)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση στάθμης g_L του L. Από το Θεώρημα 5.3.10(δ) έχουμε

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 1\} = L = \{x \in \mathbb{R}^n : g_L(x) \leq 1\}. \tag{5.3.39}$$

Από αυτή την ισότητα θα εξαχθεί η ισότητα των g και g_L.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Αν $g(x) = 0$, τότε για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $g(\lambda x) = 0 \leq 1$, άρα $\lambda x \in L$. Έπεται ότι $g_L(x) = 0$. Αν $g_L(x) = 0$, τότε $\lambda x \in L$ για κάθε $\lambda > 0$, άρα $g_L(\lambda x) \leq 1$ για κάθε $\lambda > 0$. Έπεται ότι $\lambda g(x) = g(\lambda x) \leq 1$ για κάθε $\lambda > 0$, συνεπώς $g(x) = 0$.

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $g(x) > 0$ και $g_L(x) > 0$. Τότε $g(x/g(x)) = 1$, οπότε

$$\frac{g_L(x)}{g(x)} = g_L\left(\frac{x}{g(x)}\right) \leq 1. \tag{5.3.40}$$

Επίσης, έχουμε $x/g_L(x) \in L$ οπότε

$$\frac{g(x)}{g_L(x)} = g\left(\frac{x}{g_L(x)}\right) \leq 1. \tag{5.3.41}$$

Άρα, $g(x) = g_L(x)$. □

5.3.3 Σχέση των δύο συναρτήσεων

Χρησιμοποιώντας την έννοια του πολικού ενός κυρτού συνόλου μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση στήριξης και η συνάρτηση στάθμης ικανοποιούν την εξής σχέση δυϊσμού.

Θεώρημα 5.3.14. *Έστω K κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K$. Τότε $0 \in \mathrm{int}(K^\circ)$ και $h_K = g_{K^\circ}$. Αντίστροφα, έστω L κυρτό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(L)$. Τότε το L° είναι συμπαγές και ισχύει $h_{L^\circ} = g_L$.*

Απόδειξη. Αφού το K είναι συμπαγές κυρτό και $0 \in K$, η h_K ορίζεται καλά και παίρνει μη αρνητικές τιμές. Το K° είναι κλειστό κυρτό και έχουμε δείξει ότι αν το K είναι φραγμένο τότε $0 \in \mathrm{int}(K^\circ)$. Άρα, η g_{K° ορίζεται καλά. Παρατηρούμε ότι

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : h_K(y) \leq 1\}. \tag{5.3.42}$$

Από το Θεώρημα 5.3.13 (με $g = h_K \geq 0$) έπεται ότι $h_K = g_{K^\circ}$.

Αντίστροφα, έστω L κυρτό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(L)$. Από την τελευταία υπόθεση συμπεραίνουμε ότι το L° είναι φραγμένο. Το L° είναι κυρτό και κλειστό (άρα, συμπαγές) και $0 \in L^\circ$. Επομένως, η h_{L° ορίζεται καλά και είναι μη αρνητική. Από το πρώτο μέρος του Θεωρήματος έχουμε

$$h_{L^\circ} = g_{L^{\circ\circ}}. \tag{5.3.43}$$

Όμως,

$$L^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}}(L \cup \{0\}) = \overline{L} = L. \tag{5.3.44}$$

Άρα, $h_{L^\circ} = g_L$. □

Πόρισμα 5.3.15. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Τότε, το K° είναι κυρτό σώμα με $0 \in \mathrm{int}(K^\circ)$ και*

$$h_K = g_{K^\circ}, \quad h_{K^\circ} = g_K. \tag{5.3.45}$$

Ειδικότερα, αν το K είναι συμμετρικό ως προς το 0 τότε οι h_K, g_K είναι νόρμες και ικανοποιούν την $(5.3.45)$.
□

Παράδειγμα

Για κάθε $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} . \tag{5.3.46}$$

Για $p = \infty$ θέτουμε

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \tag{5.3.47}$$

Για κάθε $p \in [1, \infty]$ η $\| \cdot \|_p$ είναι μη αρνητική, κυρτή και θετικά ομογενής. ΄Αρα, είναι συνάρτηση στάθμης του συνόλου

$$B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}. \tag{5.3.48}$$

Για κάθε p, το B_p^n είναι κυρτό, συμμετρικό ως προς το 0, συμπαγές (περιέχεται στον κύβο B_∞^n) και $0 \in \mathrm{int}(B_p^n)$. ΄Αρα, η $\| \cdot \|_p$ είναι νόρμα.

Από το Θεώρημα 5.3.14 έχουμε $h_{B_p^n} = g_{(B_p^n)^\circ}$. Στην υποπαράγραφο 5.3(α΄) είδαμε ότι $h_{B_p^n} = \| \cdot \|_q$ όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Δηλαδή, $g_{(B_p^n)^\circ} = g_{B_q^n}$. Από την Πρόταση 5.3.11 συμπεραίνουμε ότι

$$(B_p^n)^\circ = B_q^n \tag{5.3.49}$$

για κάθε $p \in (1, \infty)$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (και $q = 1$ αν $p = \infty$, $q = \infty$ αν $p = 1$).