ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Εισαγωγή

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1 Εισαγωγή

1.1 Ευκλείδειος χώρος

Το πλαίσιο στο οποίο θα δουλέψουμε είναι ο n–διάστατος Ευκλείδειος χώρος. Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τη γραμμική δομή του $\mathbb{R}^n$ και με την έννοια του μετρικού χώρου (πιο συγκεκριμένα, με την τοπολογία που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από την Ευκλείδεια νόρμα). Στο μεγαλύτερο μέρος αυτής της πρώτης παραγράφου συζητάμε λεπτομερέστερα (χωρίς όμως αυστηρότητα) τον ορισμό του n–διάστατου όγκου που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το μάθημα.

§**1. Η γραμμική δομή**. Ο n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από όλες τις n-άδες $x = (x_1,\dots,x_n)$ πραγματικών αριθμών. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα λέγονται *διανύσματα* (ή πιο συχνά) *σημεία*. Μπορούμε να προσθέτουμε σημεία: αν $x = (x_1,\dots,x_n)$ και $y = (y_1,\dots,y_n)$ τότε ορίζουμε

$$x + y := (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n). \tag{1.1.1}$$

Μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάζουμε ένα σημείο με έναν πραγματικό αριθμό: αν $x = (x_1,\dots,x_n)$ και αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε ορίζουμε

$$\alpha x := (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n). \tag{1.1.2}$$

Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με αυτές τις πράξεις είναι ένας γραμμικός χώρος. Οι βασικές έννοιες από τη Γραμμική Άλγεβρα θεωρούνται γνωστές.

Αν A και B είναι δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε το *άθροισμα των A και B κατά Minkowski* είναι το σύνολο

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}. \tag{1.1.3}$$

Στην ειδική περίπτωση $A = \{x\}$, γράφουμε $x + B$ αντί του $\{x\} + B$ (το $x + B$ είναι η *μεταφορά του B κατά x*). Επίσης, για κάθε μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t \geq 0$ ορίζουμε

$$tA = \{ta : a \in A\}. \tag{1.1.4}$$

§**2. Η Ευκλείδεια νόρμα**. Θεωρούμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$: αν $x = (x_1,\dots,x_n)$ και $y = (y_1,\dots,y_n)$ τότε θέτουμε

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n. \tag{1.1.5}$$

Γράφουμε $\{e_1,\dots,e_n\}$ για τη συνήθη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, …, $e_n = (0,0,0,\dots,1)$.

Μέσω του εσωτερικού γινομένου $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ορίζονται: η (Ευκλείδεια) *νόρμα* του x

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1.1.6}$$

και η *απόσταση* μεταξύ δύο σημείων x και y:

$$d(x,y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.1.7}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle^2. \tag{1.1.8}$$

Η «τοπολογία» του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ θεωρείται γνωστή.

§**3. Ο ορισμός του κυρτού συνόλου**. Έστω x και y δύο σημεία στον $\mathbb{R}^n$. Το *ευθύγραμμο τμήμα* $[x, y]$ με άκρα τα x και y είναι το σύνολο όλων των σημείων της μορφής $x + t(y - x)$ με $t \in [0, 1]$:

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}. \tag{1.1.9}$$

Έστω τώρα A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το A είναι *κυρτό* αν για κάθε $x, y \in A$ και για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$(1 - t)x + ty \in A. \tag{1.1.10}$$

Με άλλα λόγια, ένα σύνολο είναι κυρτό αν «για κάθε δύο σημεία του περιέχει και το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει».

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό και συμπαγές σύνολο που έχει μη κενό εσωτερικό.

§**4. Ο n–διάστατος όγκος**. Έστω A ένα μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τη *χαρακτηριστική συνάρτηση* χ_A του A που ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής: $\chi_A(x) = 1$ αν $x \in A$ και $\chi_A(x) = 0$ αν $x \notin A$. Λέμε ότι το A *έχει όγκο* αν η χ_A είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Σε αυτή την περίπτωση, ο όγκος του A ορίζεται από την

$$|A| = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\, dx. \tag{1.1.11}$$

Ο ορισμός αυτός προϋποθέτει τη γνώση του ολοκληρώματος Riemann για φραγμένες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$, όπου X είναι ένας κύβος της μορφής $[-M, M]^n$. Ένας ισοδύναμος τρόπος ορισμού του όγκου είναι ο εξής. Ξεκινάμε με την κλάση $\mathcal{I}$ όλων των ορθογωνίων που έχουν τις ακμές τους παράλληλες πρός τους άξονες συντεταγμένων (τις διευθύνσεις των ορθοκανονικών διανυσμάτων e_j). Δηλαδή, $I \in \mathcal{I}$ αν υπάρχουν $a_j \leq b_j$ στο $\mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, n)$ ώστε

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]. \tag{1.1.12}$$

Τότε, ο όγκος του I είναι (εξ ορισμού) το γινόμενο των μηκών των ακμών του:

$$|I| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n). \tag{1.1.13}$$

Ονομάζουμε τώρα *στοιχειώδες σύνολο* κάθε πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων που ανήκουν στην κλάση I και έχουν ξένα εσωτερικά (δεν επικαλύπτονται). Συμβολίζουμε την κλάση των στοιχειωδών συνόλων με $\mathcal{F}$. Αν $F = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ είναι ένα στοιχειώδες σύνολο, τότε ορίζουμε

$$|F| = \sum_{k=1}^{m} |I_k|. \tag{1.1.14}$$

Πρέπει βέβαια να δείξουμε ότι για κάθε στοιχειώδες σύνολο F ο όγκος $|F|$ ορίστηκε καλά, δηλαδή ότι είναι ανεξάρτητος από τον τρόπο με τον οποίο γράψαμε το F σαν πεπερασμένη ένωση μη επικαλυπτόμενων ορθογωνίων από την $\mathcal{I}$ (άσκηση).

Έχοντας ορίσει τον όγκο για την κλάση των στοιχειωδών συνόλων, προσπαθούμε να τον ορίσουμε για γενικότερα σύνολα με μία διαδικασία προσέγγισης από μέσα και απ' έξω (στη γλώσσα του ολοκληρώματος Riemann, μιλάμε για κάτω και άνω αθροίσματα της χ_A). Έστω A ένα μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τον *εσωτερικό όγκο* του A μέσω της

$$\underline{|A|} = \sup\{|F| : F \subseteq A, F \in \mathcal{F}\}, \tag{1.1.15}$$

και τον *εξωτερικό όγκο* του A μέσω της

$$\overline{|A|} = \inf\{|F| : A \subseteq F, F \in \mathcal{F}\}. \tag{1.1.16}$$

Λέμε ότι το A *έχει όγκο* (είναι Jordan μετρήσιμο) αν $\underline{|A|} = \overline{|A|}$. Αν αυτό συμβαίνει, ο όγκος του A ορίζεται από την

$$|A| = \underline{|A|} = \overline{|A|}. \tag{1.1.17}$$

Θεώρημα 1.1.1. *Κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ έχει όγκο.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1 είναι εκτενής χωρίς να είναι δύσκολη (παραλείπεται). Οι ιδιότητες του όγκου που θα χρησιμοποιούμε στη συνέχεια είναι απλές συνέπειες του ορισμού.

(α) Ο όγκος παραμένει αναλλοίωτος ως προς μεταφορές. Αν το K έχει όγκο και αν $x \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$|x + K| = |K|. \tag{1.1.18}$$

(β) Αν το K έχει όγκο και αν $t \geq 0$ τότε

$$|tK| = t^n|K|. \tag{1.1.19}$$

Γενικότερα, για κάθε αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$,

$$|T(K)| = |\det T| \cdot |K|. \tag{1.1.20}$$

Γράφουμε Id για την ταυτοτική απεικόνιση. Παρατηρήστε ότι $tK = T(K)$ όπου $T = t \cdot Id$, οπότε η (1.1.19) είναι ειδική περίπτωση της (1.1.20).

(γ) Έστω $r \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το *πλέγμα*

$$\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n = \left\{\left(\frac{m_1}{r}, \dots, \frac{m_n}{r}\right) : m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{1.1.21}$$

Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$N_r = \frac{1}{r}\mathbb{Z}^n \cap K. \tag{1.1.22}$$

Δηλαδή, N_r είναι το σύνολο των σημείων του πλέγματος $\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n$ τα οποία ανήκουν στο K. Θεωρούμε το *θεμελιώδες ορθογώνιο* $Q_r = [0, \frac{1}{r})^n$ του $\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n$, και την ένωση

$$\bigcup_{z \in N_r} (z + Q_r). \tag{1.1.23}$$

Ο όγκος της είναι ίσος με $|N_r|/r^n$. Είναι λογικό να υποθέσουμε (και μπορούμε να αποδείξουμε) ότι καθώς το $r \to +\infty$, παίρνουμε όλο και καλύτερη προσέγγιση του όγκου του K. Δηλαδή, ισχύει το εξής:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{|N_r|}{|K| r^n} = 1. \tag{1.1.24}$$

1.2 Η ανισότητα Brunn--Minkowski

Η ανισότητα Brunn--Minkowski συνδέει τον όγκο με την πράξη της πρόσθεσης κατά Minkowski.

Θεώρημα 1.2.1 (ανισότητα Brunn--Minkowski). *Έστω A και B μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}. \tag{1.2.1}$$

Θα δώσουμε μία απόδειξη που χρησιμοποιεί τα στοιχειώδη σύνολα και οφείλεται στον Lyusternik (1940). Στο Παράρτημα αυτού του Κεφαλαίου περιγράφουμε την απόδειξη της «συναρτησιακής γενίκευσης» της ανισότητας Brunn--Minkowski (ανισότητα Prékopa--Leindler). Μία τρίτη απόδειξη, με τη μέθοδο της συμμετρικοποίησης κατά Steiner, θα δοθεί αργότερα.

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που τα A και B είναι ορθογώνια με τις ακμές τους παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων. Υποθέτουμε ότι $a_1,\ldots,a_n > 0$ είναι τα μήκη των ακμών του A, και $b_1,\ldots,b_n > 0$ είναι τα μήκη των ακμών του B. Τότε, το $A+B$ είναι κι αυτό ορθογώνιο με τις ακμές του παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων, και αντίστοιχα μήκη $a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n$. Επομένως, η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$((a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n))^{1/n} \geq (a_1\cdots a_n)^{1/n} + (b_1\cdots b_n)^{1/n}. \tag{1.2.2}$$

Ισοδύναμα, ζητάμε να δείξουμε ότι

$$\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)^{1/n} + \left(\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)^{1/n} \leq 1. \tag{1.2.3}$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, το αριστερό μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι μικρότερο ή ίσο από

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right) = 1. \tag{1.2.4}$$

Δηλαδή, η ανισότητα Brunn-Minkowski ισχύει σε αυτή την απλή περίπτωση.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα A, B είναι στοιχειώδη σύνολα, καθένα δηλαδή από αυτά είναι πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων που έχουν ξένα εσωτερικά και ακμές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων.

Ονομάζουμε *πολυπλοκότητα* του ζευγαριού (A, B) το συνολικό πλήθος των ορθογωνίων που σχηματίζουν τα A, B. Θα αποδείξουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski με επαγωγή ως προς την πολυπλοκότητα m του (A, B). Οταν $m = 2$, τα A και B είναι ορθογώνια και η ανισότητα έχει ήδη αποδειχθεί.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m \geq 3$ και ότι το ζητούμενο ισχύει γιά ζευγάρια στοιχειωδών συνόλων με πολυπλοκότητα $\leq m-1$. Αφού $m \geq 3$, κάποιο από τα A και B (έστω το A) αποτελείται από τουλάχιστον δύο ορθογώνια. Έστω I_1, I_2 δύο από αυτά. Τα I_1 και I_2 έχουν ξένα εσωτερικά, συνεπώς μπορούμε να τα διαχωρίσουμε με ένα υπερεπίπεδο παράλληλο προς κάποιον κύριο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ (άσκηση). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι αυτό το υπερεπίπεδο περιγράφεται από την $x_n = \rho$ γιά κάποιο $\rho \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$A_1 = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq \rho\} \quad \text{και} \quad A_2 = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \leq \rho\}. \tag{1.2.5}$$

Τα A_1 και A_2 είναι στοιχειώδη σύνολα, έχουν ξένα εσωτερικά και καθένα τους σχηματίζεται από λιγότερα ορθογώνια απ' ότι το A (Το υπερεπίπεδο $x_n = \rho$ στη χειρότερη περίπτωση χωρίζει κάθε ορθογώνιο του

A σε δύο ορθογώνια, ένα στο A_1 κι ένα στο A_2. Όμως, το I_1 περιέχεται εξ ολοκλήρου στο A_1 ενώ το I_2 στο A_2 - ή το αντίθετο). Περνώντας τώρα στο B, βρίσκουμε υπερεπίπεδο $x_n = s$ τέτοιο ώστε αν $B_1 = B \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq s\}$ και $B_2 = B \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \leq s\}$ να ισχύει

$$\frac{|A_1|}{|A|} = \frac{|B_1|}{|B|}. \tag{1.2.6}$$

Τα B_1 και B_2 είναι στοιχειώδη σύνολα με πλήθος ορθογωνίων που δεν ξεπερνάει αυτό του B. Ονομάζουμε λ τον κοινό λόγο όγκων στην $(1.2.6)$. Προφανώς, $0 < \lambda < 1$.

Παρατηρήστε ότι

$$A + B = (A_1 + B_1) \cup (A_1 + B_2) \cup (A_2 + B_1) \cup (A_2 + B_2). \tag{1.2.7}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $A_1 + B_1 \subseteq \{x : x_n \geq \rho + s\}$ και $A_2 + B_2 \subseteq \{x : x_n \leq \rho + s\}$, τα $A_1 + B_1$ και $A_2 + B_2$ έχουν ξένα εσωτερικά. Επομένως,

$$|A + B| \geq |A_1 + B_1| + |A_2 + B_2|. \tag{1.2.8}$$

Με βάση την κατασκευή που κάναμε, εφαρμόζεται η επαγωγική υπόθεση στο δεξιό μέλος: έχουμε

$$|A_1 + B_1|^{1/n} \geq |A_1|^{1/n} + |B_1|^{1/n}$$

και

$$|A_2 + B_2|^{1/n} \geq |A_2|^{1/n} + |B_2|^{1/n},$$

οπότε κάνοντας πράξεις, και παίρνοντας υπ' όψιν την $(1.2.6)$ έχουμε

$$\begin{aligned} |A + B| &\geq \left((\lambda|A|)^{1/n} + (\lambda|B|)^{1/n}\right)^n + \left(((1-\lambda)|A|)^{1/n} + ((1-\lambda)|B|)^{1/n}\right)^n \\ &= \lambda\left[|A|^{1/n} + |B|^{1/n}\right]^n + (1-\lambda)\left[|A|^{1/n} + |B|^{1/n}\right]^n \\ &= \left[|A|^{1/n} + |B|^{1/n}\right]^n, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$|A + B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}. \tag{1.2.9}$$

Γενική Περίπτωση. Έστω A, B τυχόντα μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν ακολουθίες $\{A_m\}$ και $\{B_m\}$ στοιχειωδών συνόλων με τις ιδιότητες

$$A_m \subseteq A, \qquad |A_m| \to |A|, \qquad B_m \subseteq B, \qquad |B_m| \to |B|.$$

Τότε, $A_m + B_m \subseteq A + B$ γιά κάθε $m \in \mathbb{N}$ και

$$\begin{aligned} |A + B|^{1/n} &\geq \limsup_{m\to\infty} |A_m + B_m|^{1/n} \\ &\geq \limsup_{m\to\infty} \left[|A_m|^{1/n} + |B_m|^{1/n}\right] \\ &= |A|^{1/n} + |B|^{1/n}. \end{aligned}$$

Υποθέσαμε ότι τα $A, B, A + B$ έχουν όγκο: σε κάθε περίπτωση, δείξαμε ότι $\underline{|A + B|}^{1/n} \geq \underline{|A|}^{1/n} + \underline{|B|}^{1/n}$. □

Η ανισότητα Brunn--Minkowski συχνά διατυπώνεται και ως εξής:

Πόρισμα 1.2.2. *Έστω A, B μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει*

$$|\lambda A + (1-\lambda)B|^{1/n} \geq \lambda |A|^{1/n} + (1-\lambda)|B|^{1/n}. \tag{1.2.10}$$

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσετε ότι $|\lambda A|^{1/n} = \lambda |A|^{1/n}$ και $|(1-\lambda)B|^{1/n} = (1-\lambda)|B|^{1/n}$. □

Συνέπεια της ανισότητας Brunn--Minkowski είναι η ακόλουθη ανισότητα (η οποία είναι *ανεξάρτητη της διάστασης*).

Πόρισμα 1.2.3. *Έστω A, B μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε*

$$|\lambda A + (1-\lambda)B| \geq |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}. \tag{1.2.11}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $z \mapsto log z$ είναι κοίλη, κι αυτό έχει σαν συνέπεια την

$$x^{\lambda} y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda) y \tag{1.2.12}$$

γιά κάθε $x, y > 0$ και $\lambda \in (0,1)$. Από την ανισότητα Brunn--Minkowski παίρνουμε

$$\begin{aligned} |\lambda A + (1-\lambda)B| &\geq \left[\lambda |A|^{1/n} + (1-\lambda)|B|^{1/n}\right]^n \\ &\geq \left[|A|^{\lambda/n}|B|^{(1-\lambda)/n}\right]^n \\ &= |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda} \end{aligned}$$

για κάθε $\lambda \in (0,1)$. □

Ιστορικά, η πρώτη απόδειξη της ανισότητας Brunn--Minkowski (για κυρτά σώματα) βασίστηκε στην *αρχή του Brunn*.

Θεώρημα 1.2.4 (αρχή του Brunn). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta \in S^{n-1}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Θέτουμε $\theta^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\}$ και ορίζουμε $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θέτοντας*

$$f_\theta(t) = |K \cap (\theta^{\perp} + t\theta)|. \tag{1.2.13}$$

Τότε, η $f_\theta^{1/(n-1)}$ είναι κοίλη στο φορέα της.

Ο Brunn οδηγήθηκε σε αυτό το συμπέρασμα ξεκινώντας από το ακόλουθο ερώτημα. Είναι σωστό ότι αν τα $t < r < s$ ανήκουν στο φορέα της f_θ τότε

$$f_\theta(r) \geq \min\{f_\theta(t), f_\theta(s)\}; \tag{1.2.14}$$

Παρατηρήστε ότι η απάντηση είναι καταφατική αν δεχτούμε το Θεώρημα 1.2.4. Για κάθε κοίλη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t < r < s$ στο $[a,b]$ γράφουμε $r = (1-\lambda)t + \lambda s$ και έχουμε

$$f(r) \geq (1-\lambda) f(t) + \lambda f(s) \geq \min\{f(t), f(s)\}. \tag{1.2.15}$$

Εφαρμόζοντας την (1.2.15) για την $f = f_\theta^{1/(n-1)}$ παίρνουμε την (1.2.14).

Η απόδειξη της (1.2.14) είναι απλή στην περίπτωση του επιπέδου: ας υποθέσουμε ότι K είναι ένα κυρτό σώμα στο $\mathbb{R}^2$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $\theta = e_2$. Η προβολή $P(K)$ του K στη διεύθυνση του e_2 είναι το σύνολο

$$P(K) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K\}. \tag{1.2.16}$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι το $P(K)$ είναι κυρτό. Έστω $x,y \in P(K)$ και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί t και s ώστε $(x,t) \in K$ και $(y,s) \in K$. Αφού το K είναι κυρτό, έχουμε

$$(1.2.17) \qquad (1-\lambda)(x,t) + \lambda(y,s) = ((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)t + \lambda s) \in K,$$

συνεπώς $(1-\lambda)x+\lambda y \in P(K)$. Το $P(K)$ είναι και συμπαγές: αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $P(x,t) = x$, τότε η P είναι συνεχής. Αφού το K είναι συμπαγές, το ίδιο ισχύει και για το $P(K)$. Επίσης, από το γεγονός ότι το K περιέχει έναν δίσκο (έχει μη κενό εσωτερικό) έπεται ότι το $P(K)$ περιέχει κάποιο διάστημα. Τελικά, $P(K) = [a,b]$ για κάποιους $a < b$.

Ορίζουμε δύο συναρτήσεις $h, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$(1.2.18) \qquad h(x) = \min\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K\} \quad \text{και} \quad g(x) = \max\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K\}.$$

Από τη συμπάγεια του K έπεται ότι οι h και g ορίζονται καλά: το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K\}$ είναι κλειστό διάστημα. Θα δείξουμε ότι η h είναι κυρτή. Αρκεί να δείξουμε ότι γιά κάθε $x,y \in [a,b]$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει $h((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y)$. Ας υποθέσουμε ότι $h(x) = t$ και $h(y) = s$. Τότε, $(x,t) \in K$ και $(y,s) \in K$. Αφού το K είναι κυρτό, παίρνουμε

$$(1.2.19) \qquad (1-\lambda)(x,t) + \lambda(y,s) = ((1-\lambda)x + \lambda y), (1-\lambda)t + \lambda s) \in K.$$

Από τον ορισμό της h έπεται ότι

$$(1.2.20) \qquad h\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)t + \lambda s = (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y).$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η g είναι κοίλη. Από τον ορισμό των h και g μπορούμε να γράψουμε το κυρτό σώμα K στη μορφή

$$(1.2.21) \qquad K = \{(x,t) : x \in [a,b],\ h(x) \leq t \leq g(x)\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$(1.2.22) \qquad f_\theta(x) = f_{e_2}(x) = g(x) - h(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού η g είναι κοίλη και η h είναι κυρτή, βλέπουμε αμέσως ότι η $f_\theta = g + (-h)$ είναι κοίλη. □

Θα δείξουμε ότι η αρχή του Brunn είναι συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.4. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\theta = e_n$. Για κάθε t στο φορέα της $f_\theta(t) = |K \cap \{x_n = t\}|$ θέτουμε

$$(1.2.23) \qquad K(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,t) \in K\}.$$

Από την κυρτότητα του K έπεται ότι: αν t,s ανήκουν στο φορέα της f_θ και αν $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$(1.2.24) \qquad K(\lambda t + (1-\lambda)s) \supseteq \lambda K(t) + (1-\lambda)K(s).$$

Από το Πόρισμα 1.2.2 έχουμε

$$\begin{aligned} |K(\lambda t + (1-\lambda)s)|^{\frac{1}{n-1}} &\geq |\lambda K(t) + (1-\lambda)K(s)|^{\frac{1}{n-1}} \\ &\geq \lambda |K(t)|^{\frac{1}{n-1}} + (1-\lambda)|K(s)|^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Άρα, η $t \mapsto |K(t)|^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt[n-1]{f_\theta(t)}$ είναι κοίλη στο φορέα της. □

Παρατήρηση. Αντίστροφα, η ανισότητα Brunn--Minkowski για κυρτά σώματα προκύπτει από το Θεώρημα 1.2.4 ως εξής: αν K, T είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε τα σύνολα

$$K_1 = K \times \{0\} \quad \text{και} \quad T_1 = T \times \{1\} \tag{1.2.25}$$

στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και ορίζουμε το κυρτό σύνολο L που «παράγουν»:

$$L = \{\lambda(x,0) + (1-\lambda)(y,1) : x \in K, y \in T\}. \tag{1.2.26}$$

Για κάθε $t \in [0,1]$ θέτουμε

$$L(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in L\}. \tag{1.2.27}$$

Παρατηρήστε ότι

$$|L(t)| = |L \cap (e_{n+1}^{\perp} + te_{n+1})| \tag{1.2.28}$$

οπότε το Θεώρημα 1.2.4 δείχνει ότι η συνάρτηση $t \mapsto |L(t)|^{1/n}$ είναι κοίλη στο $[0,1]$. Από τον ορισμό του L βλέπουμε ότι $L(0) = K$, $L(1) = T$ και $L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{K+T}{2}$. Συνεπώς,

$$\left|\frac{K+T}{2}\right|^{1/n} \geq \frac{|K|^{1/n}}{2} + \frac{|T|^{1/n}}{2}. \tag{1.2.29}$$

Έπεται ότι $|K+T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}$. □

1.3 Η ισοπεριμετρική ανισότητα

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn--Minkowski μπορούμε να δώσουμε μία λύση για το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$:

> Ανάμεσα σε όλα τα μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που έχουν δεδομένο όγκο α, η μπάλα όγκου α έχει ελάχιστη επιφάνεια.

Ο ορισμός της επιφάνειας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός του Minkowski, ο οποίος βασίζεται στην έννοια της *t-περιοχής*.

Ορισμός 1.3.1 (t-περιοχή). *Αν A είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $t > 0$, η t-περιοχή του A είναι το σύνολο*

$$A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leq t\}, \tag{1.3.1}$$

όπου $d(x,A) = \inf\{\|x-a\|_2 : a \in A\}$ είναι η απόσταση του x από το σύνολο A.

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$A_t = A + tB_2^n. \tag{1.3.2}$$

Ορισμός 1.3.2 (επιφάνεια κατά Minkowski). *Αν A είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η επιφάνεια $\partial(A)$ του A ορίζεται από την*

$$\partial(A) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t}. \tag{1.3.3}$$

Αν το A είναι κυρτό σώμα, τότε το $\liminf$ στο δεξιό μέλος είναι όριο.

Η απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τον Ευκλείδειο χώρο δίνεται από το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.3. *Αν A είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\partial(A) \geq n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n}. \tag{1.3.4}$$

Πράγματι, άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.3.3 είναι το εξής.

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω A μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $r > 0$ τέτοιος ώστε $|A| = |rB_2^n|$. Τότε,*

$$\partial(A) \geq \partial(rB_2^n). \tag{1.3.5}$$

Απόδειξη. Αφού $|A| = \omega_n r^n$, από το Θεώρημα 1.3.3 έχουμε

$$\partial(A) \geq n\omega_n^{(n-1)/n} r^{n-1}\omega_n^{1/n} = n\omega_n r^{n-1}. \tag{1.3.6}$$

Από την (1.3.2) έχουμε $(rB_2^n)_t = rB_2^n + tB_2^n = (r+t)B_2^n$. Από τον ορισμό της επιφάνειας έπεται ότι

$$\partial(rB_2^n) = \lim_{t\to 0^+} \frac{|(r+t)B_2^n| - |rB_2^n|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\omega_n(r+t)^n - \omega_n r^n}{t} = n\omega_n r^{n-1}. \tag{1.3.7}$$

Άρα, $\partial(A) \geq \partial(rB_2^n)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.3. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn--Minkowski γράφουμε

$$\begin{aligned} \frac{|A_t| - |A|}{t} &= \frac{|A + tB_2^n| - |A|}{t} \\ &\geq \frac{\left(|A|^{1/n} + |tB_2^n|^{1/n}\right)^n - |A|}{t} \\ &= \frac{|A| + nt|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n} + O(t^2) - |A|}{t} \\ &= n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n} + O(t), \end{aligned}$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $t \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t} \geq n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n}. \tag{1.3.8}$$

Από τον ορισμό της επιφάνειας έπεται η (1.3.4). □

Παρατηρήστε ότι αυτό που δείξαμε είναι ακόμα ισχυρότερο: για κάθε $t > 0$, ανάμεσα σε όλα τα μη κενά συμπαγή υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου που έχουν δεδομένο όγκο, η μπάλα έχει τη «μικρότερη t-επέκταση».

Πρόταση 1.3.5. *Έστω B μία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $|A| = |B|$, τότε $|A_t| \geq |B_t|$ για κάθε $t > 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} |A + tB|^{1/n} &\geq |A|^{1/n} + |tB|^{1/n} = |A|^{1/n} + t|B|^{1/n} \\ &= (1+t)|B|^{1/n} = |B + tB|^{1/n}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

1.4 Όγκος και διάσταση

Σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε τον όγκο των απλούστερων (και πιο σημαντικών) παραδειγμάτων κυρτών σωμάτων. Κεντρικό ρόλο στη μελέτη μας παίζει φυσιολογικά η *μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα*

$$B_2^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}. \tag{1.4.1}$$

Με άλλα λόγια, $x \in B_2^n$ αν και μόνο αν $\|x\|_2 \leq 1$. Αν $r > 0$ τότε rB_2^n είναι η μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα r (το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\|_2 \leq r$).

Το απλούστερο ίσως παράδειγμα κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ είναι ο *μοναδιαίος κύβος*

$$B_\infty^n = [-1, 1]^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1\}. \tag{1.4.2}$$

Ο όγκος του κύβου είναι (από τον ορισμό του όγκου!) ίσος με

$$|B_\infty^n| = 2^n. \tag{1.4.3}$$

Παρατηρήστε ότι

$$B_2^n \subseteq B_\infty^n \subseteq \sqrt{n} B_2^n.$$

Πράγματι, αν $x \in B_2^n$ τότε $|x_i| \leq \|x\|_2 \leq 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, δηλαδή $x \in B_\infty^n$. Από την άλλη πλευρά, αν $x \in B_\infty^n$ τότε $\|x\|_2^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq n$ δηλαδή $x \in \sqrt{n} B_2^n$. Οι κορυφές του κύβου είναι τα 2^n σημεία της μορφής $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ όπου $\varepsilon_i = \pm 1$. Κάθε τέτοιο σημείο βρίσκεται σε απόσταση $\sqrt{n}$ από το 0. Δηλαδή, καθώς η διάσταση μεγαλώνει, οι κορυφές του κύβου «απομακρύνονται» από τη μπάλα, και ο κύβος μοιάζει «όλο και λιγότερο» με μπάλα.

Άσκηση: Μία ενδιαφέρουσα δοκιμή για τη διαίσθηση σας σχετικά με αυτά τα δύο απλά κυρτά σώματα είναι η εξής. Σχεδιάστε το μοναδιαίο τετράγωνο στο επίπεδο. Τώρα, φτιάξτε τέσσερις δίσκους με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα 1. Οι δίσκοι εφάπτονται στα μέσα των ακμών του τετραγώνου. Υπολογίστε την ακτίνα ρ_2 του μεγαλύτερου δίσκου με κέντρο το 0 η οποία απλώς ακουμπάει (και δεν τέμνει) τους τέσσερις δίσκους. Ποιά είναι η τιμή του ρ_2;

Τώρα κάντε το ίδιο στον n–διάστατο χώρο. Θεωρήστε μπάλες ακτίνας 1 με κέντρα τις 2^n κορυφές του B_∞^n. Αυτές εφάπτονται πάνω στις ακμές του κύβου. Ποιά είναι η ακτίνα ρ_n της μεγαλύτερης μπάλας με κέντρο το 0 η οποία απλώς ακουμπάει τις άλλες μπάλες; Είναι σωστό ότι $\rho_n B_2^n \subseteq B_\infty^n$;

Ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n. Μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του ω_n χρησιμοποιώντας την αρχή του Cavallieri. Αν $H(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$ τότε για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$|K| = \int_{-\infty}^{\infty} |K \cap H(t)|\, dt \tag{1.4.4}$$

όπου $|K \cap H(t)|$ είναι ο $(n-1)$–διάστατος όγκος της τομής του K με το «επίπεδο» $H(t)$. Στην περίπτωση της μπάλας παίρνουμε

$$\omega_n = \int_{-1}^{1} |B_2^n \cap H(t)| dt. \tag{1.4.5}$$

Παρατηρώντας ότι για κάθε $t \in [-1, 1]$ η τομή της B_2^n με το $H(t)$ είναι μία $(n-1)$–διάστατη μπάλα ακτίνας $r(t) = \sqrt{1 - t^2}$, έχουμε

$$|B_2^n \cap H(t)| = \omega_{n-1} (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{1.4.6}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην αναδρομική σχέση

$$\omega_n = 2\omega_{n-1}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt. \tag{1.4.7}$$

Συμβολίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με I_n. Αν θέσουμε $t = \text{συν}\,\theta$ έχουμε

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \text{ημ}^n\,\theta\,d\theta. \tag{1.4.8}$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \text{ημ}^n\,\theta\,d\theta = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \text{ημ}^{n-2}\,\theta\,d\theta = \frac{n-1}{n}I_{n-2}. \tag{1.4.9}$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Λήμμα 1.4.1. *Ο όγκος της B_2^n είναι ίσος με*

$$\omega_n = \omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \tag{1.4.10}$$

αν $n = 2k$ και

$$\omega_n = \omega_{2k-1} = \pi^{k-1}\frac{2^{2k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \tag{1.4.11}$$

αν $n = 2k-1$.

Απόδειξη. Από τις (1.4.7) και (1.4.8) βλέπουμε ότι

$$\frac{\omega_{n+2}}{\omega_n} = \frac{2\omega_{n+1}I_{n+2}}{2\omega_{n-1}I_n} = \frac{(n+1)\omega_{n+1}}{(n+2)\omega_{n-1}} \tag{1.4.12}$$

για κάθε $n \geq 2$. Δεδομένου ότι $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{2\pi}{3}$ (γιατί;), μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι

$$\omega_{n+2} = \frac{2\pi}{n+2}\omega_n \tag{1.4.13}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Διακρίνοντας περιπτώσεις (n άρτιος και n περιττός), και χρησιμοποιώντας πάλι τη μέθοδο της επαγωγής, παίρνουμε το ζητούμενο. Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ ισχύει η (1.4.11) τότε

$$\begin{aligned}
\omega_{2k+1} &= \frac{2\pi}{2k+1}\pi^{k-1}\frac{2^{2k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \\
&= \pi^k\frac{2^{2k-1}\cdot 2\cdot 2k\cdot(k-1)!}{(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)!} \\
&= \pi^k\frac{2^{2k+1}k!}{(2k+1)!}.
\end{aligned}$$

Ανάλογα (και πιο απλά) δουλεύουμε στην περίπτωση που ο n είναι άρτιος. □

Στους τύπους που βρήκαμε για τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας εμφανίζονται παραγοντικά. Αν θέλουμε να εκτιμήσουμε σωστά το μέγεθος του αριθμού ω_n για μεγάλες τιμές του n, χρειαζόμαστε ακριβείς εκτιμήσεις για την ακολουθία $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Μία πρώτη εκτίμηση προκύπτει ως εξής: θεωρούμε τη συνάρτηση $x \mapsto log x$. Έχουμε

$$\int_1^n log x\,dx = (xlog x - x)\big|_1^n = nlog n - (n-1) = log(n^n/e^{n-1}). \tag{1.4.14}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού η $log x$ είναι αύξουσα, έχουμε

$$\int_1^n log x\,dx = \int_1^2 log x\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n log x\,dx < log 2 + \cdots + log n = log(n!) \tag{1.4.15}$$

και

$$\begin{aligned}\int_1^n log x\,dx > \int_2^3 log x\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n log x\,dx &> log 2 + \cdots + log(n-1)\\ &= log((n-1)!).\end{aligned} \tag{1.4.16}$$

Δηλαδή, $n!/n < n^n/e^{n-1} < n!$, απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}. \tag{1.4.17}$$

Από την (1.4.17) βλέπουμε ότι

$$\frac{e\sqrt[n]{n!}}{n} \to 1, \tag{1.4.18}$$

καθώς το $n \to \infty$, δηλαδή η $\sqrt[n]{n!}$ «συμπεριφέρεται» σαν την $\frac{n}{e}$ για μεγάλα n. Η εκτίμηση αυτή είναι αρκετή για πολλές εφαρμογές.

Ο *τύπος του Stirling* περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια τη συμπεριφορά της ακολουθίας $n!$. Μία απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα αυτού του Κεφαλαίου.

Λήμμα 1.4.2 (τύπος του Stirling). *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n+1)^{-1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n)^{-1}}. \tag{1.4.19}$$

Έστω (α_n) και (β_n) δύο ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Συμφωνούμε να γράφουμε $\alpha_n \sim \beta_n$ αν $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$. Από τους τύπους του Λήμματος 1.4.1 και από την προσέγγιση του $n!$ στο Λήμμα 1.4.2 έπεται το εξής.

Θεώρημα 1.4.3. *Έστω ω_n ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\omega_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{n/2}. \tag{1.4.20}$$

Ειδικότερα, η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έχει ακτίνα

$$r_n \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi e}}. \tag{1.4.21}$$

Απόδειξη. Έστω $n = 2k$. Αφού $e^{(12k)^{-1}} \to 1$ και $e^{(12k+1)^{-1}} \to 1$ όταν $k \to \infty$,

$$\omega_n = \frac{\pi^k}{k!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\pi^k e^k}{k^k} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{n/2}. \tag{1.4.22}$$

Η περίπτωση $n = 2k - 1$ είναι μία (λίγο) δυσκολότερη άσκηση.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, παρατηρήστε ότι αν r_n είναι η ακτίνα μίας n–διάστατης μπάλας όγκου 1 τότε $\omega_n r_n^n = 1$. Δηλαδή, $r_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\omega_n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi e}}$. □

Είδαμε ότι η ακτίνα r_n της n–διάστατης μπάλας όγκου 1 είναι «μεγάλη»: της τάξης της $\sqrt{n}$. Το επόμενο ερώτημα που θα συζητήσουμε είναι: πώς κατανέμεται ο όγκος μέσα σ' αυτή τη μπάλα; Ας δούμε πρώτα ποιός είναι ο όγκος μίας $(n-1)$–διάστατης τομής της $B(n) := r_n B_2^n$ που περνάει από το 0. Σύμφωνα με όσα έχουμε πεί,

$$|B(n) \cap H(0)| = \omega_{n-1} r_n^{n-1} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n^{(n-1)/n}}. \tag{1.4.23}$$

Από το Θεώρημα 1.4.3 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n^{(n-1)/n}} &\sim \frac{(\sqrt{\pi n})^{(n-1)/n}}{\sqrt{\pi(n-1)}} \left(\frac{2\pi e}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \left(\frac{n}{\sqrt{2\pi e}}\right)^{(n-1)/2} \\ &\sim \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$|B(n) \cap H(0)| \sim \sqrt{e}. \tag{1.4.24}$$

Τώρα, μπορούμε να εκτιμήσουμε τον $(n-1)$–διάστατο όγκο της τομής της $B(n)$ που βρίσκεται σε απόσταση t από το 0. Η τομή $B(n) \cap H(t)$ είναι μία μπάλα ακτίνας $\sqrt{r_n^2 - t^2}$, αν βέβαια $|t| \leq r_n$. Άρα,

$$|B(n) \cap H(t)| = \omega_{n-1}(r_n^2 - t^2)^{(n-1)/2} = \omega_{n-1} r_n^{n-1} \left(1 - \frac{t^2}{r_n^2}\right)^{(n-1)/2}. \tag{1.4.25}$$

Αφού $\omega_{n-1} r_n^{n-1} = |B(n) \cap H(0)| \sim \sqrt{e}$ και $r_n^2 \sim n/(2\pi e)$, βλέπουμε ότι

$$|B(n) \cap H(t)| \sim \sqrt{e} \left(1 - \frac{2\pi e t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{1.4.26}$$

Όμως,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{e} \left(1 - \frac{2\pi e t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{e} \cdot \exp(-\pi e t^2). \tag{1.4.27}$$

Έχουμε λοιπόν δείξει το εξής.

Πρόταση 1.4.4. *Έστω $t \in \mathbb{R}$ και έστω $B(n)$ η n–διάστατη μπάλα όγκου 1. Τότε,*

$$|B(n) \cap \{x : x_n = t\}| \to \sqrt{e} \cdot \exp(-\pi e t^2) \tag{1.4.28}$$

καθώς το $n \to \infty$. □

Δηλαδή, αν «προβάλλουμε τον όγκο της $B(n)$ στη διεύθυνση του e_n» ή σε οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση, παίρνουμε μία κατανομή που, καθώς το n τείνει στο άπειρο, μοιάζει πολύ με την *κανονική κατανομή* διασποράς $1/(2\pi e)$ (η οποία είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση n).

Μία (εκ πρώτης όψεως) παράξενη συνέπεια της Πρότασης 1.4.4 είναι η εξής. Ας θεωρήσουμε τη λωρίδα $L_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_n| \leq 1\}$. Τότε, για μεγάλα n έχουμε

$$|B(n) \cap L_n| \sim \sqrt{e} \int_{-1}^{1} \exp(-\pi e t^2)\, dt = 1 - 2\sqrt{e} \int_{1}^{\infty} \exp(-\pi e t^2)\, dt. \tag{1.4.29}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{e} \int_{1}^{\infty} \exp(-\pi e t^2)\, dt \leq \sqrt{e} \int_{1}^{\infty} t \exp(-\pi e t^2)\, dt = \frac{\sqrt{e}}{2\pi e} e^{-\pi e}. \tag{1.4.30}$$

Ο αριθμός αυτός είναι «πολύ μικρός». Δηλαδή, παρόλο που η ακτίνα της n–διάστατης μπάλας όγκου 1 είναι της τάξης της $\sqrt{n}$, ο όγκος της είναι σχεδόν ολόκληρος μέσα σε μία (οποιαδήποτε) συμμετρική (ως προς το 0) λωρίδα πλάτους 2 (!)

Επειδή το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται ανεξάρτητα από το ποιά λωρίδα θα διαλέξουμε, μπαίνει κανείς στον πειρασμό να υποθέσει ότι ο όγκος συγκεντρώνεται στην τομή των λωρίδων, δηλαδή κοντά στο κέντρο της μπάλας. Ούτε όμως αυτό είναι σωστό: αν, για παράδειγμα, θεωρήσετε τη μπάλα $(r_n/2)B_2^n$ (που έχει «μεγάλη» ακτίνα), τότε

$$|(r_n/2)B_2^n| = \frac{1}{2^n}|B(n)| = \frac{1}{2^n}\ (!) \tag{1.4.31}$$

Δηλαδή, ο όγκος της μπάλας συγκεντρώνεται κοντά στο σύνορο της.

Το πρόβλημα των Busemann--Petty. Γράφουμε S^{n-1} για την Ευκλείδεια *μοναδιαία σφαίρα*:

$$S^{n-1} = \{\theta \in \mathbb{R}^n : \|\theta\|_2 = 1\}. \tag{1.4.32}$$

Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\theta \in S^{n-1}$ ορίζουμε

$$\theta^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle = 0\}. \tag{1.4.33}$$

Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\theta^{\perp} + t\theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle = t\}. \tag{1.4.34}$$

Το σύνολο $\theta^{\perp}$ είναι ο $(n-1)$–διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που έχει σαν *κάθετο διάνυσμα* το θ. Το σύνολο $\theta^{\perp} + t\theta$ είναι το *υπερεπίπεδο* που έχει σαν κάθετο διάνυσμα το θ και βρίσκεται σε (προσημασμένη) απόσταση t από το 0.

Έστω K και T δύο *συμμετρικά* κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Με τον όρο «συμμετρικό» εννοούμε πάντα «συμμετρικό ως προς το 0». Δηλαδή, έχουμε $x \in K$ αν και μόνο αν $-x \in K$ (ομοίως για το T). Υποθέτουμε ότι:

Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $|K \cap \theta^{\perp}| < |T \cap \theta^{\perp}|$.

Δηλαδή, κάθε *κεντρική τομή* του K έχει μικρότερο $(n-1)$–διάστατο όγκο από την αντίστοιχη κεντρική τομή του T. Το πρόβλημα των Busemann-Petty (1956) είναι το εξής:

Ισχύει τότε ότι $|K| < |T|$;

Η απάντηση είναι καταφατική αν $n = 2$. Για την ακρίβεια, η υπόθεση για τις τομές των K και T έχει σαν συνέπεια ότι $K \subset T$. Η απάντηση όμως για διαστάσεις $n > 2$ δόθηκε πολύ πρόσφατα: είναι καταφατική μόνο αν $n = 2, 3, 4$.

Ο υπολογισμός που κάναμε για την Ευκλείδεια μπάλα $B(n)$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έδειξε ότι: για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$|B(n) \cap \theta^{\perp}| = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n^{(n-1)/n}} \to \sqrt{e} \tag{1.4.35}$$

όταν $n \to \infty$. Το αντίστοιχο ερώτημα για τον κύβο $Q(n) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ είναι πολύ δυσκολότερο. Ο K. Ball (~ 1985) απέδειξε ότι: για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$1 \leq |Q(n) \cap \theta^{\perp}| \leq \sqrt{2}. \tag{1.4.36}$$

Παρατηρήστε ότι $\sqrt{2} < \sqrt{e}$ (!). Αν λοιπόν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη, τότε $|B(n) \cap \theta^{\perp}| > \sqrt{2}$. Δεν είναι πολύ δύσκολο να ελέγξετε ότι: αν $n \geq 10$, τότε

$$|Q(n) \cap \theta^{\perp}| \leq \sqrt{2} < |B(n) \cap \theta^{\perp}| \tag{1.4.37}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Δηλαδή, το ζευγάρι $K = Q(n)$ και $T = B(n)$ δίνει αντιπαράδειγμα στο ερώτημα των Busemann--Petty: ικανοποιεί τις υποθέσεις αλλά δεν ικανοποιεί το ζητούμενο.

1.4.1 Νόρμες και συμμετρικά κυρτά σώματα

Νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$.

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$.

(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι σε κάθε χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ με νόρμα αντιστοιχεί φυσιολογικά ένα συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα. Αντίστροφα, όπως θα δούμε αργότερα, κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K επάγει μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 1.4.5. *Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Η «μοναδιαία μπάλα»*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \tag{1.4.38}$$

του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα.

Απόδειξη. Η συμμετρία του K είναι απλή: αν $x \in K$ τότε $\|-x\| = \|x\| \leq 1$, άρα $-x \in K$. Για να δείξουμε ότι το K είναι κυρτό θεωρούμε $x, y \in K$ και $\lambda \in (0,1)$ και παρατηρούμε ότι

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq \|(1-\lambda)x\| + \|\lambda y\| = (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \leq (1-\lambda) + \lambda = 1, \tag{1.4.39}$$

δηλαδή $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$.

Για τη συμπάγεια και το μη κενό εσωτερικό του K, παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $u = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|u\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |t_i|\,\|e_i\| \leq \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\| \sum_{i=1}^{n} |t_i|. \tag{1.4.40}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι

$$\|u\| \leq \sqrt{n}\,\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\| \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)^{1/2} = M\,\|u\|_2, \tag{1.4.41}$$

όπου $M := \sqrt{n}\,\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|$ βλέπουμε ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x - y\| \leq M\,\|x - y\|_2. \tag{1.4.42}$$

Δηλαδή, η $\|\cdot\|$ είναι Lipschitz συνεχής ως προς την Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, ο περιορισμός της $\|\cdot\|$ στο συμπαγές σύνολο $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή: υπάρχουν $m, M > 0$ ώστε

$$m \leq \|x\| \leq M \tag{1.4.43}$$

για κάθε $x \in S^{n-1}$. Το γεγονός ότι $m > 0$ δικαιολογείται ως εξής: έχουμε $m = \|x_0\|$ για κάποιο $x_0 \in S^{n-1}$ και $\|x_0\| > 0$ αφού $x_0 \neq 0$ και η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$m\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M\|x\|_2. \tag{1.4.44}$$

Πράγματι, αν $x = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει τετριμμένα, ενώ αν $x \neq 0$ έχουμε $\frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1}$ οπότε

$$m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_2} = \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \leq M. \tag{1.4.45}$$

Από την ανισότητα $m\|x\|_2 \leq \|x\|$ έπεται ότι $K \subseteq (1/m)B_2^n$, δηλαδή το K είναι φραγμένο. Από το γεγονός ότι η $\|\cdot\|$ είναι συνεχής έπεται ότι το K είναι κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Άρα, το K είναι συμπαγές.

Τέλος, από την ανισότητα $\|x\| \leq M\|x\|_2$ έπεται ότι $K \supseteq (1/M)B_2^n$, και ειδικότερα, το K έχει μη κενό εσωτερικό. □

Η επόμενη πρόταση δίνει μία ταυτότητα που εκφράζει τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ σαν ολοκλήρωμα «συνάρτησης της νόρμας» στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 1.4.6. *Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω K η αντίστοιχη μοναδιαία μπάλα. Για κάθε $p > 0$ ισχύει η ισότητα*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} = |K| \int_0^\infty p t^{n+p-1} e^{-t^p}\,dt. \tag{1.4.47}$$

Ειδικότερα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|}dx = |K| \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt. \tag{1.4.48}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\|x\|}^{\infty} pt^{p-1}e^{-t^p}\,dt\,dx = \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{tK}(x)pt^{p-1}e^{-t^p}\,dx\,dt = \int_0^{\infty} pt^{p-1}e^{-t^p}|tK|\,dt$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} = |K|\int_0^{\infty} pt^{n+p-1}e^{-t^p}\,dt.$$

□

1.5 Παράρτημα

1.5.1 Ανισότητα Prékopa--Leindler

Η ανισότητα των Prékopa και Leindler είναι η γενίκευση της ανισότητας Brunn-Minkowski στο πλαίσιο των μετρήσιμων θετικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{1.5.1}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}. \tag{1.5.2}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς τη διάσταση n.

(α) $n = 1$: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t\int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t\int g. \tag{1.5.3}$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t)f(x(t)) = \int f \quad , \quad y'(t)g(y(t)) = \int g. \tag{1.5.4}$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)y(t). \tag{1.5.5}$$

Οι x και y είναι γνήσια αύξουσες. Επομένως, η z είναι κι αυτή γνήσια αύξουσα. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}. \tag{1.5.6}$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned}
\int h(s)ds &= \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt \\
&\geq \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t))(x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}dt \\
&\geq \int_0^1 f^{\lambda}(x(t))g^{1-\lambda}(y(t))\left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^{\lambda}\left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda} dt \\
&= \left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και ότι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Έστω f,g,h όπως στο Θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w,s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την υπόθεση του θεωρήματος για τις f,g και h έπεται ότι, αν $x,y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1+(1-\lambda)s_0}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f_{s_1}(x)^{\lambda}g_{s_0}(y)^{1-\lambda}, \tag{1.5.7}$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned}
H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1+(1-\lambda)s_0} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1}\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0}\right)^{1-\lambda} =: F^{\lambda}(s_1)G^{1-\lambda}(s_0).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις F,G και H, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h = \int_{\mathbb{R}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}. \tag{1.5.8}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa--Leindler μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα Brunn--Minkowski. Δείχνουμε πρώτα το εξής:

Πρόταση 1.5.2. *Έστω K,T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}. \tag{1.5.9}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K+(1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 1.5.1. Πράγματι, αν $x \notin K$ ή $y \notin T$ τότε

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0 = [f(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda}, \tag{1.5.10}$$

ενώ αν $x \in K$ και $y \in T$ τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda K + (1-\lambda)T$, άρα

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1 = [f(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda}. \tag{1.5.11}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler παίρνουμε το ζητύμενο. □

Θεωρούμε τώρα συμπαγή μη-κενά K και T (με $|K| > 0$ και $|T| > 0$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε), και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/n}K \quad , \quad T_1 = |T|^{-1/n}T \quad , \quad \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}. \tag{1.5.12}$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (1.5.9) παίρνουμε

$$|\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1| \geq 1. \tag{1.5.13}$$

Ομως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}, \tag{1.5.14}$$

επομένως η (1.5.13) παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geq \left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n}\right)^n \tag{1.5.15}$$

και έπεται το ζητούμενο. □

1.5.2 Η συνάρτηση Γάμμα

Η συνάρτηση $\Gamma : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ ορίζεται μέσω της

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Λήμμα 1.5.3. *Η συνάρτηση Γ ικανοποιεί τα εξής:*

(α) $\Gamma(1) = 1$.

(β) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x > 0$.

(γ) $\Gamma(n+1) = n!$ *για κάθε* $n = 0,1,2,\ldots$

(δ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Επίσης, η συνάρτηση Γ είναι λογαριθμικά κυρτή: η $log\Gamma$ είναι κυρτή συνάρτηση.

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 1 - \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 1. \tag{1.5.16}$$

(β) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = xG(x) \tag{1.5.17}$$

χρησιμοποιώντας την $\lim_{t\to\infty} t^x e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \exp(x logt - t) = 0$.

(γ) Εφαρμόζοντας το (β) για $x = 1, \ldots, n$ παίρνουμε

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!. \tag{1.5.18}$$

(δ) Θέτοντας όπου $x = \frac{1}{2}$ και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s^2 = t$ παίρνουμε:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}. \tag{1.5.19}$$

Τέλος δείχνουμε ότι η συνάρτηση Γάμμα είναι λογαριθμικά κυρτή: αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda, \mu \geq 0$ με $\lambda + \mu = 1$ ισχύει

$$\Gamma(\lambda x + \mu y) \leq (\Gamma(x))^\lambda (\Gamma(y))^\mu. \tag{1.5.20}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα

$$\Gamma(\lambda x + \mu y) = \int_0^\infty (t^{x-1}e^{-t})^\lambda (t^{y-1}e^{-t})^\mu dt. \tag{1.5.21}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Hölder

$$\int |fg| \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\right)^{1/q} \tag{1.5.22}$$

όπου $p, q > 0$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ για τις συναρτήσεις $f(t) = (t^{x-1}e^{-t})^\lambda$ και $g(t) = (t^{y-1}e^{-t})^\mu$ με $p = \frac{1}{\lambda}$, $q = \frac{1}{\mu}$ έχουμε ότι

$$\Gamma(\lambda x + \mu y) \leq \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\right)^\lambda \left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt\right)^\mu = (\Gamma(x))^\lambda (\Gamma(y))^\mu. \tag{1.5.23}$$

□

Στην παράγραφο 1.4(α) είδαμε ότι αν K είναι η μοναδιαία μπάλα μίας νόρμας $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$, τότε, για κάθε $p > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} dx = |K| \cdot \int_0^\infty p t^{n+p-1} e^{-t^p} dt.$$

Έστω $1 \leq p < \infty$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη γενική ταυτότητα, θα δείξουμε ότι ο όγκος της $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leq 1\}$ είναι ίσος με

$$|B_p^n| = \frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}. \tag{1.5.24}$$

Πράγματι, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_p^p}\,dx = |B_p^n| \int_0^{\infty} pt^{n+p-1} e^{-t^p}\,dt. \tag{1.5.25}$$

Όμως,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_p^p}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-|x_1|^p} \cdots e^{-|x_n|^p}\,dx_1 \cdots dx_n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|^p}\,dt\right)^n = \left(2\int_0^{\infty} e^{-t^p}\,dt\right)^n. \tag{1.5.26}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t^p = s$ παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-t^p}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} s^{\frac{1}{p}-1} e^{-s}\,ds = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\Big(\frac{1}{p}+1\Big). \tag{1.5.27}$$

Με την ίδια αντικατάσταση βλέπουμε ότι

$$\int_0^{\infty} pt^{n+p-1} e^{-t^p}\,dt = \int_0^{\infty} s^{n/p} e^{-s}\,ds = \Gamma\Big(\frac{n}{p}+1\Big). \tag{1.5.28}$$

Συνεπώς,

$$\Big[2\Gamma\Big(\frac{1}{p}+1\Big)\Big]^n = |B_p^n|\Gamma\Big(\frac{n}{p}+1\Big). \tag{1.5.29}$$

Έπεται ότι

$$|B_p^n| = \frac{\Big[2\Gamma\Big(\frac{1}{p}+1\Big)\Big]^n}{\Gamma\Big(\frac{n}{p}+1\Big)}. \tag{1.5.30}$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση $p = 2$ έχουμε

$$\omega_n = |B_2^n| = \frac{\Big[2\Gamma\Big(\frac{1}{2}+1\Big)\Big]^n}{\Gamma\Big(\frac{n}{2}+1\Big)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\Big(\frac{n}{2}+1\Big)}, \tag{1.5.31}$$

χρησιμοποιώντας την $2\Gamma\Big(\frac{1}{2}+1\Big) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1.5.3 Ο τύπος του Stirling

Λήμμα 1.5.4 (τύπος του Stirling)**.** *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n+1)^{-1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n)^{-1}}. \tag{1.5.32}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία

$$d_n := logn! - (n+\frac{1}{2})logn + n. \tag{1.5.33}$$

Παρατηρούμε ότι

$$d_n - d_{n+1} = (n + \frac{1}{2})log\frac{n+1}{n} - 1. \tag{1.5.34}$$

Γράφουμε

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}, \tag{1.5.35}$$

και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $\frac{1}{2}log\frac{1+t}{1-t} = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \cdots$ παίρνουμε

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots . \tag{1.5.36}$$

Συγκρίνοντας το δεξιό μέλος με την γεωμετρική σειρά λόγου $(2n+1)^{-2}$ βλέπουμε ότι

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3[(2n+1)^2 - 1]} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}. \tag{1.5.37}$$

Από την (1.5.36) η $\{d_n\}$ είναι φθίνουσα και από την (1.5.37) η $\{d_n - (12n)^{-1}\}$ είναι αύξουσα. Άρα, το όριο $C := \lim d_n$ υπάρχει. Από την (1.5.36) βλέπουμε επίσης ότι

$$d_n - d_{n+1} > \frac{1}{3(2n+1)^2} > \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1) - 1}, \tag{1.5.38}$$

δηλαδή η $\{d_n - (12n+1)^{-1}\}$ είναι φθίνουσα. Άρα,

$$C + \frac{1}{12n+1} < d_n < C + \frac{1}{12n} \tag{1.5.39}$$

Μένει να ελέγξουμε ότι $C = log(\sqrt{2\pi})$. Μία πολύ σύντομη απόδειξη γι' αυτό είναι η εξής: από την $d_n \to C$ έπεται εύκολα ότι

$$\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \to \frac{\sqrt{2}}{e^C} \tag{1.5.40}$$

καθώς το $n \to \infty$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(x) = (1+x)^{2n+1}$. Από το θεώρημα του Taylor,

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \frac{u''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x u^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \tag{1.5.41}$$

Θέτοντας $x = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= \sum_{0\leq k\leq n}\binom{2n+1}{k} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (2n+1)(2n)\cdots(n+1)(1+t)^n(1-t)^n dt \\ &= 2^{2n} + \binom{2n}{n}(2n+1)\int_0^1 (1-t^2)^n dt. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \cdot \frac{2n+1}{\sqrt{n}}\int_0^1 (1-t^2)^n dt = 1. \tag{1.5.42}$$

Ομως,

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \frac{2n+1}{n}\int_0^{\sqrt{n}} (1-u^2/n)^n du \to 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \tag{1.5.43}$$

καθώς το $n \to \infty$. Από τις (1.5.40), (1.5.42) και (1.5.43) παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{2}}{e^C} \cdot \sqrt{\pi} = 1, \tag{1.5.44}$$

δηλαδή, $C = log(\sqrt{2\pi})$. □