ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κυρτή Ανάλυση

Ενότητα: Το θεώρημα του Dvoretzky

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

8 Το θεώρημα του Dvoretzky

8.1 Εισαγωγή

Αφετηρία για το θεώρημα του Dvoretzky είναι το εξής Λήμμα των Dvoretzky και Rogers (1950).

Πρόταση 8.1.1. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του συμμετρικού κυρτού σώματος K. Υπάρχουν $k \simeq \sqrt{n}$ και $y_1, \dots, y_k$ ορθοκανονικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ ώστε, για κάθε $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \max_{1 \le i \le k} |a_i| \le \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \right\| \le \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \right)^{1/2}. \qquad \square \tag{8.1.1}$$

Με αφορμή αυτό το αποτέλεσμα, ο Grothendieck έθεσε το ερώτημα αν είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε το $\max_{i \le k} |a_i|$ με το $\left(\sum_{i \le k} a_i^2 \right)^{1/2}$ στην παραπάνω Πρόταση, και ταυτόχρονα να έχουμε $k = k(n) \to \infty$ καθώς το $n \to \infty$. Ισοδύναμα, αν υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ (με το k να «μεγαλώνει» με το n) ώστε

$$B_2^n \cap F \subseteq K \cap F \subseteq c B_2^n \cap F, \tag{8.1.2}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Ο Dvoretzky (1960) έδωσε καταφατική απάντηση στο ερώτημα.

Θεώρημα 8.1.2 (Dvoretzky). *Έστω $\varepsilon > 0$ και k φυσικός αριθμός. Υπάρχει $N = N(k, \varepsilon)$ με την εξής ιδιότητα: Αν X είναι χώρος με νόρμα διάστασης $n \ge N$, μπορούμε να βρούμε k-διάστατο υπόχωρο F του X με $d(F, \ell_2^k) \le 1 + \varepsilon$.*

Σε γεωμετρική γλώσσα, το Θεώρημα του Dvoretzky μας λέει ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$, κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα αρκετά μεγάλης διάστασης έχει κεντρικές τομές διάστασης k που είναι σχεδόν ελλειψοειδή. Η ακριβής εξάρτηση του $N(k, \varepsilon)$ από τα k και ε μελετήθηκε συστηματικά, και το θεώρημα του Dvoretzky πήρε πολύ πιο συγκεκριμένη ποσοτική μορφή.

Θεώρημα 8.1.3. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν ακέραιος $k \ge c\varepsilon^2 (log 1/\varepsilon)^{-1} log n$ και k-διάστατος υπόχωρος F του X ο οποίος ικανοποιεί την $d(F, \ell_2^k) \le 1 + \varepsilon$.*

Δηλαδή, το Θεώρημα 8.1.2 ισχύει με $N(k, \varepsilon) = \exp(c\varepsilon^{-2} |log \varepsilon| k)$.Η αρχική απόδειξη του Dvoretzky έδινε την εκτίμηση $N(k, \varepsilon) = \exp(c\varepsilon^{-2} k^2 log k)$. Η (βέλτιστη ως προς n) εκτίμηση του Θεωρήματος 8.1.3 αποδείχτηκε από τον Milman (1971).

Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να περιγράψει την απόδειξη του Θεωρήματος 8.1.3. Ένα από τα βασικότερα στοιχεία της απόδειξης είναι το λεγόμενο *φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου* στην S^{n-1}, το οποίο θα συζητήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

8.2 Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένη με τη γεωδαισιακή μετρική ρ: η απόσταση $\rho(x, y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y. Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο σ: για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma(A) := \frac{|\tilde{A}|}{|B_2^n|}, \tag{8.2.1}$$

όπου B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα και

$$\tilde{A} := \{sx : x \in A \text{ και } 0 \leq s \leq 1\}. \tag{8.2.2}$$

Θα χρειαστούμε τον «τύπο ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες»:

Λήμμα 8.2.1 (ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες). *Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{\infty} f(r\theta) r^{n-1}\, dr\, d\sigma(\theta). \tag{8.2.3}$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x, y) = \theta$ τότε

$$\|x - y\|_2 = 2\,\text{ημ}\,\frac{\theta}{2}, \tag{8.2.4}$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x, y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x, y) \leq \|x - y\|_2 \leq \rho(x, y). \tag{8.2.5}$$

Έστω $t > 0$. Η t-περιοχή ενός Borel υποσυνόλου A της S^{n-1} είναι το σύνολο

$$A_t = \{x \in S^{n-1} : \rho(x, A) \leq t\}. \tag{8.2.6}$$

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στη σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

> Δίνονται $\alpha \in (0, 1)$ και $t > 0$. Ανάμεσα σε όλα τα Borel υποσύνολα A της σφαίρας για τα οποία $\sigma(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα για τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_t)$ της t-περιοχής του A.

Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα. *Έστω $\alpha \in (0, 1)$ και*

$$B(x, r) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x, y) \leq r\} \tag{8.2.7}$$

μία μπάλα στην S^{n-1} με ακτίνα $r > 0$ που επιλέγεται ώστε $\sigma(B(x, r)) = \alpha$. Τότε, για κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \alpha$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\big(B(x, r)_t\big) = \sigma\big(B(x, r + t)\big). \tag{8.2.8}$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α και οποιοδήποτε $t > 0$ οι μπάλες μέτρου α δίνουν τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς τη διάσταση. Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $\alpha = 1/2$. Αν $\sigma(A) = 1/2$ και $t > 0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του A_t χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\left(B(x, \frac{\pi}{2} + t)\right) \tag{8.2.9}$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in S^{n-1}$. Εκτιμώντας από κάτω το δεξιό μέλος της (8.2.9) οδηγούμαστε στην ακόλουθη ανισότητα.

Θεώρημα 8.2.2. *Έστω $A \subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geq 1 - \sqrt{\pi/8}\exp(-t^2 n/2). \tag{8.2.10}$$

Παρατήρηση. Αυτό που έχει σημασία σε σχέση με την εκτίμηση στην (8.2.10) είναι ότι, όσο μικρό $t > 0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-t^2 n/2)$ τείνει στο 0 καθώς το $n \to \infty$ και μάλιστα με πολύ ταχύ ρυθμό (εκθετικά ως προς n). Επομένως, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την t-περιοχή οποιουδήποτε υποσυνόλου A της S^{n+1} με $\sigma(A) = 1/2$ είναι «σχεδόν μηδενικό» αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.2 βασίζεται πολύ ισχυρά στη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Για τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νου μας είναι αρκετή μία ανισότητα σαν την (8.2.10) και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος. Θα δώσουμε μία απλή απόδειξη της (8.2.10) χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski.

Λήμμα 8.2.3. *Θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Δηλαδή, $\mu(A) = |A|/|B_2^n|$ για κάθε Borel $A \subseteq B_2^n$. Αν $A, C \subseteq B_2^n$ συμπαγή, και*

$$d(A,C) := \min\{\|a-c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0, \tag{8.2.11}$$

τότε

$$\min\{\mu(A), \mu(C)\} \leq \exp(-\rho^2 n/8). \tag{8.2.12}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+C}{2}$. Από την ανισότητα Brunn--Minkowski παίρνουμε $|\frac{A+C}{2}| \geq \min\{|A|, |C|\}$. Συνεπώς,

$$\mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \geq \min\{\mu(A), \mu(C)\}. \tag{8.2.13}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \in A$ και $c \in C$, ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει

$$\|a+c\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|c\|_2^2 - \|a-c\|_2^2 \leq 4 - \rho^2, \tag{8.2.14}$$

επομένως

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n. \tag{8.2.15}$$

Συνδυάζοντας τις (8.2.13) και (8.2.15) βλέπουμε ότι

$$\min\{\mu(A), \mu(C)\} \leq \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leq \exp(-\rho^2 n/8). \qquad \square \tag{8.2.16}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.2. Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Θέτουμε $C = S^{n-1} \setminus A_t$ και θεωρούμε τα υποσύνολα

$$A_1 = \{\rho a : a \in A, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1\} \text{ και } C_1 = \{\rho a : a \in C, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1\} \tag{8.2.17}$$

της B_2^n. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$d(A_1, C_1) \geq \text{ημ}\,\frac{t}{2} \geq \frac{t}{\pi}. \tag{8.2.18}$$

Από το Λήμμα 8.2.3 συμπεραίνουμε ότι

$$|C_1| \leq \exp(-d^2 n/8)|B_2^n| \leq \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right)|B_2^n|. \tag{8.2.19}$$

Όμως, από τον ορισμό του σ έχουμε $|B_2^n|\sigma(C) = |\tilde{C}|$ και $|C_1| = (1 - 2^{-n})|\tilde{C}|$. Συνδυάζοντας με την (8.2.19) βλέπουμε ότι

$$\sigma(A_t^c) = \sigma(C) \leq \frac{1}{1 - 2^{-n}} \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right). \tag{8.2.20}$$

Δηλαδή,

$$\sigma(A_t) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 t^2 n) \tag{8.2.21}$$

όπου $c_1 = 2$ και $c_2 = 1/(8\pi^2)$. Η (8.2.21) είναι εντελώς ανάλογη με την ανισότητα του Θεωρήματος 8.2.1 αν εξαιρέσουμε τις ακριβείς τιμές των σταθερών c_1 και c_2. □

Ορισμός 8.2.4 (μέτρο συνέχειας). *Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε $\omega_f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ (το μέτρο συνέχειας της f) με*

$$\omega_f(t) = \max\{|f(x) - f(y)| : \rho(x,y) \leq t,\ x, y \in S^{n-1}\}. \tag{8.2.22}$$

Ορισμός 8.2.5 (μέσος Lévy). *Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υπάρχει μοναδικός αριθμός $L_f \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$\sigma\left(\{x : f(x) \leq L_f\}\right) \geq \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\left(\{x : f(x) \geq L_f\}\right) \geq \frac{1}{2}. \tag{8.2.23}$$

Ο L_f ονομάζεται μέσος Lévy της f.

Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι αν το μέτρο συνέχειας της $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ έχει «ομαλή συμπεριφορά» και αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη, τότε οι τιμές της f συγκεντρώνονται ισχυρά (με την έννοια του μέτρου) γύρω από τον μέσο Lévy της f.

Λήμμα 8.2.6. *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$,*

$$\sigma\left(x \in S^{n-1} : |f(x) - L_f| \geq \omega_f(\varepsilon)\right) \leq 2c_1 \exp(-c_2 \varepsilon^2 n). \tag{8.2.24}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $A_f = \{x : f(x) = L_f\}$. Θεωρούμε επίσης τα σύνολα

$$A_f^- = \{x : f(x) \leq L_f\} \quad \text{και} \quad A_f^+ = \{x : f(x) \geq L_f\}. \tag{8.2.25}$$

Από τον ορισμό του μέσου Lévy L_f και από το Θεώρημα 8.2.2, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\sigma\left((A_f^\pm)_\varepsilon\right) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 \varepsilon^2 n}. \tag{8.2.26}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της f ελέγχουμε (άσκηση) ότι

$$(A_f)_\varepsilon = (A_f^+)_\varepsilon \cap (A_f^-)_\varepsilon. \tag{8.2.27}$$

Άρα,

$$\sigma\left((A_f)_\varepsilon\right) \geq 1 - 2c_1 e^{-c_2\varepsilon^2 n}. \tag{8.2.28}$$

Αφού $|f(x) - L_f| \leq \omega_f(\varepsilon)$ στο $(A_f)_\varepsilon$, έπεται το συμπέρασμα. □

Αν υποθέσουμε ότι η $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b, δηλαδή $|f(x)-f(y)| \leq b|x-y|$ για κάθε $x, y \in S^{n-1}$, τότε $\omega_f(\varepsilon) \leq b\varepsilon$. Από το Λήμμα 8.2.6 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 8.2.7. *Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Τότε,*

$$\sigma\left(x \in S^{n-1} : |f(x) - L_f| \geq b\varepsilon\right) \leq 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n) \tag{8.2.29}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. □

8.3 Το θεώρημα του Dvoretzky

Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα διάστασης n. Η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$, δηλαδή υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε

$$\frac{1}{a}\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\|x\|_2 \tag{8.3.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι a, b είναι οι μικρότεροι θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει η (8.3.1).

Η συνάρτηση $r : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ με $r(x) = \|x\|$, είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Γράφουμε L_r για τον μέσο Lévy της r.

Λήμμα 8.3.1. *Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει το εξής: αν $m \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$ και $y_1, \ldots, y_m \in S^{n-1}$, τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε, για κάθε $i = 1, \ldots, m$,*

$$L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon. \tag{8.3.2}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι υπάρχει φυσιολογικό μέτρο πιθανότητας ν στην $O(n)$ το οποίο έχει την εξής ιδιότητα: αν $x_0 \in S^{n-1}$ και $A \subset S^{n-1}$, τότε

$$\sigma(A) = \nu\{U \in O(n) : Ux_0 \in A\}. \tag{8.3.3}$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{x \in S^{n-1} : L_r - b\varepsilon \leq \|x\| \leq L_r + b\varepsilon\}. \tag{8.3.4}$$

Από την Πρόταση 8.2.7 έχουμε

$$\sigma(A) \geq 1 - 2c_1 e^{-c_2\varepsilon^2 n} \tag{8.3.5).}$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ θέτουμε

$$B_i = \{U \in O(n) : L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon\}. \tag{8.3.6}$$

Οι (8.3.3) και (8.3.5) δείχνουν ότι

$$\nu(B_i) > 1 - 2c_1 e^{-c_2\varepsilon^2 n}. \tag{8.3.7}$$

Αφού $m \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, το $B = \bigcap B_i$ έχει μέτρο

$$\nu(B) \geq 1 - \sum \nu(B_i^c) \geq 1 - 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n/2). \tag{8.3.8}$$

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, έχουμε $\nu(B) > 0$ δηλαδή $B \neq \emptyset$. Τότε, αν $U \in B$ παίρνουμε

$$L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon \tag{8.3.9}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$. □

Λήμμα 8.3.2 (δ-δίκτυο). *Έστω $\delta \in (0,1)$. Υπάρχει $\mathcal{N} \subset S^{k-1}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i) Για κάθε $y \in S^{k-1}$ υπάρχει $x \in \mathcal{N}$ ώστε $\|x - y\|_2 < \delta$.

(ii) $|\mathcal{N}| \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^k$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{N} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ένα υποσύνολο της S^{k-1} του οποίου τα σημεία έχουν ανά δύο απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του δ και έχει τον μέγιστο δυνατό πληθάριθμο. Τέτοιο υποσύνολο υπάρχει λόγω της συμπάγειας της S^{k-1}.

Τότε, το $\mathcal{N}$ ικανοποιεί το (i): αν όχι, υπάρχει $y \in S^{k-1}$ ώστε $\|x_i - y\|_2 \geq \delta$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$. Όμως τότε, το $\mathcal{N}' = \{x_1, \ldots, x_m, y\}$ είναι ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν στην S^{k-1} και οι αποστάσεις τους ανά δύο είναι μεγαλύτερες ή ίσες του δ. Αυτό είναι άτοπο αφού το $\mathcal{N}'$ έχει περισσότερα στοιχεία από το $\mathcal{N}$.

Για το (ii) θεωρούμε τα σύνολα $x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k$, $i \leq m$. Αυτά έχουν ανά δύο ξένα εσωτερικά, και

$$x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k \subset B_2^k + \frac{\delta}{2}B_2^k \tag{8.3.10}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Συνεπώς,

$$\left|\bigcup_{i=1}^m \left(x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k\right)\right| \leq \left|\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)B_2^k\right|. \tag{8.3.11}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^m \left|\frac{\delta}{2}B_2^k\right| \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^k |B_2^k|, \tag{8.3.12}$$

δηλαδή,

$$m\left(\frac{\delta}{2}\right)^k |B_2^k| \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^k |B_2^k|. \tag{8.3.13}$$

Άρα, $m \leq (1 + \frac{2}{\delta})^k$. □

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δείχνουμε το εξής.

Πρόταση 8.3.3. *Έστω $\delta, \varepsilon \in (0,1)$. Αν $(1+2/\delta)^k \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, τότε υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ και υπάρχει δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της $S_F : S^{n-1} \cap F$ με την ιδιότητα*

$$L_r - b\varepsilon \leq \|x\| \leq L_r + b\varepsilon \tag{8.3.14}$$

για κάθε $x \in \mathcal{N}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε υπόχωρο F_0 του $\mathbb{R}^n$ με διάσταση $\dim(F_0) = k$. Από το Λήμμα 8.3.2, υπάρχει δ-δίκτυο $\{y_1, \ldots, y_m\}$ της μοναδιαίας σφαίρας S_{F_0} του F_0, με $m \leq (1+2/\delta)^k$.

Αφού $(1+2/\delta)^k \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, το Λήμμα 8.3.1 δείχνει ότι υπάρχει $U \in O(n)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i \leq m$,

$$L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon. \tag{8.3.15}$$

Θέτουμε $F := U(F_0)$ και $x_i := Uy_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Αφού ο U είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, το $\{x_1, \ldots, x_m\}$ είναι δ-δίκτυο της S_F, για το οποίο ισχύει

$$L_r - b\varepsilon \leq \|x_i\| \leq L_r - b\varepsilon. \tag{8.3.16}$$

Αυτό αποδεικνύει την Πρόταση. □

Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα, θα περάσουμε από το δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_F σε ολόκληρη την S_F.

Πρόταση 8.3.4. *Έστω F ένας k-διάστατος υπόχωρος του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ για τον οποίο υπάρχει δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_F με την ιδιότητα*

$$L_r - b\varepsilon \leq \|x\| \leq L_r + b\varepsilon \tag{8.3.17}$$

για κάθε $x \in \mathcal{N}$. Τότε, για κάθε $y \in S_F$ έχουμε

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta}L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta} \leq \|y\| \leq \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta}. \tag{8.3.18}$$

Απόδειξη. Έστω $y \in S_F$. Υπάρχει $x_0 \in \mathcal{N}$ ώστε $\|y - x_0\|_2 = \delta_1 < \delta$. Τότε, $\frac{y-x_0}{\delta_1} \in S_F$, άρα υπάρχει $x_1 \in \mathcal{N}$ ώστε

$$\left\| \frac{y-x_0}{\delta_1} - x_1 \right\|_2 = \delta_2 < \delta. \tag{8.3.19}$$

Τότε,

$$\|y - x_0 - \delta_1 x_1\|_2 = \delta_1\delta_2 < \delta^2. \tag{8.3.20}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε $x_0, \ldots, x_n \in \mathcal{N}$ ώστε

$$\left\| y - \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\|_2 \leq \delta^{n+1}, \tag{8.3.21}$$

όπου $\delta_0 = 1$. Αφού $\delta < 1$,

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i. \tag{8.3.22}$$

Όμως, $\prod_{j=0}^{i} \delta_j \leq \delta^i$, άρα

$$\begin{aligned} \|y\| &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \|x_i\| \leq (L_r + b\varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \\ &= \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \|y\| &\geq \|x_0\| - \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\| \geq L_r - b\varepsilon - \frac{\delta}{1-\delta}(L_r + b\varepsilon) \\ &= \frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta} \leq \|y\| \leq \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta} \tag{8.3.23}$$

για κάθε $y \in S_F$. □

Επιλέγοντας κατάλληλα τα δ, ε, παίρνουμε μία πρώτη εκτίμηση για τη διάσταση των σχεδόν Ευκλείδειων υποχώρων του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Θεώρημα 8.3.5. *Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα $r(x) = \|x\|$ που ικανοποιεί την $\|x\| \leq b|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Αν*

$$k \leq k_X(\varepsilon) := c_3 \varepsilon^2 [log^{-1}(1/\varepsilon)] n \left(\frac{L_r}{b} \right)^2, \tag{8.3.24}$$

όπου $c_3 > 0$ κατάλληλη απόλυτη σταθερά, τότε υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = k$ ώστε: για κάθε $x \in S_F$,

$$(1+\varepsilon)^{-1} L_r \leq \|x\| \leq L_r (1+\varepsilon). \tag{8.3.25}$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 8.3.4, αν $\zeta, \delta \in (0,1)$ και ο $k \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την $(1 + 2/\delta)^k \leq \exp(c_2 \zeta^2 n/2)$, τότε για τον τυχαίο k-διάστατο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $x \in S_F$ έχουμε

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\zeta}{1-\delta} \leq \|x\| \leq \frac{L_r + b\zeta}{1-\delta}. \tag{8.3.26}$$

Για την $(8.3.25)$ αρκεί να επιλέξουμε τα $\delta, \zeta \in (0,1)$ έτσι ώστε

$$\frac{L_r + b\zeta}{1-\delta} \leq L_r (1+\varepsilon) \tag{8.3.27}$$

και

$$\frac{L_r}{1+\varepsilon} \leq \frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\zeta}{1-\delta}. \tag{8.3.28}$$

Αν επιλέξουμε $\zeta = \frac{L_r \delta}{b}$ και $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, παρατηρούμε ότι οι δύο ανισότητες επαληθεύονται.

Μένει να προσδιορίσουμε την ελάχιστη τιμή του k η οποία ικανοποιεί την

$$\left(1+\frac{6}{\epsilon}\right)^k \leq \exp\left(\frac{c_2}{18}\varepsilon^2 n\left(\frac{L_r}{b}\right)^2\right). \tag{8.3.29}$$

Ζητάμε

$$k log\frac{6}{\varepsilon} \leq c_2'\varepsilon^2 n\left(\frac{L_r}{b}\right)^2, \tag{8.3.30}$$

οπότε αρκεί να ικανοποιείται η $k \leq k_X(\varepsilon)$. □

Το Θεώρημα 8.3.5 μας λέει ότι η διάσταση των σχεδόν Ευκλείδειων υποχώρων του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ εξαρτάται απο την τάξη της ποσότητας $\frac{L_r}{b}$. Θεωρούμε τη *μέση τιμή* της $r(x) = \|x\|$

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x). \tag{8.3.31}$$

Τότε, οι L_r και M συγκρίνονται αν το γινόμενο ab δεν είναι «πολύ μεγάλο».

Λήμμα 8.3.6. *Υποθέτουμε ότι η $r(x) = \|x\|$ ικανοποιεί την $\frac{1}{a}|x| \leq \|x\| \leq b|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και ότι $ab \leq \sqrt{n}$. Τότε,*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{M}{L_r} \leq c, \tag{8.3.32}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\|x\|_2$, όπου $b \leq \sqrt{n}$. Από την Πρόταση 8.2.7, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\sigma\{x : |r(x) - L_r| \geq b\varepsilon\} \leq 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n). \tag{8.3.33}$$

Γράφουμε

$$|M - L_r| \leq \int_{S^{n-1}} |r(x) - L_r|\, d\sigma(x) = \int_0^\infty \sigma\{x : |r(x) - L_r| \geq t\}dt. \tag{8.3.34}$$

Θέτουμε $b\varepsilon = t$. Χρησιμοποιώντας την $b \leq \sqrt{n}$, παίρνουμε

$$|M - L_r| \leq \int_0^\infty 2c_1 \exp(-c_2 t^2)dt = c_4. \tag{8.3.35}$$

Συνεπώς,

$$\left|\frac{M}{L_r} - 1\right| \leq \frac{c_4}{L_r}. \tag{8.3.36}$$

Όμως, αν $x \in S^{n-1}$ τότε $\|x\| \geq \|x\|_2 \geq 1$. Άρα, $L_r \geq 1$. Έπεται ότι

$$\frac{M}{L_r} \leq c = 1 + c_4. \tag{8.3.37}$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, παρατηρούμε ότι

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x) \geq \int_{\{x:\, \|x\| \geq L_r\}} \|x\|\, d\sigma(x) \geq \frac{1}{2}L_r. \tag{8.3.38}$$

Άρα, $M/L_r \geq 1/2$. □

Λήμμα 8.3.7. *Για κάθε* $1 \leq m \leq n$ *ισχύει*

$$\int_{S^{n-1}} \max_{j\leq m} |x_j|\, d\sigma(x) \geq c_5 \left(\frac{logm}{n}\right)^{1/2}, \tag{8.3.39}$$

όπου $c_5 > 0$ *απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το μέτρο του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την $(2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|_2^2/2)$. Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \max_{j\leq m} |t_j| d\gamma_m(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \max_{j\leq m} |t_j| d\gamma_n(t)\\ &= \lambda_n \int_{S^{n-1}} \max_{j\leq m} |x_j| \sigma(dx),\end{aligned}$$

όπου $\lambda_n \simeq \sqrt{n}$. Όμως,

$$\begin{aligned}\gamma_m\left(t : \max_{j\leq m} |t_j| < s\right) &= (2\pi)^{-m/2} \int_{-s}^{s} \cdots \int_{-s}^{s} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} t_j^2\right) dt_1 \cdots dt_m\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{s} e^{-t^2/2} dt\right)^m \leq (1 - ce^{-s^2/2})^m.\end{aligned}$$

Άρα, αν επιλέξουμε $s \simeq c_1\sqrt{logm}$, καταλήγουμε στην

$$\gamma_m\left(t : \max_{j\leq m} |t_j| \geq c_1\sqrt{logm}\right) \geq \frac{1}{2}. \tag{8.3.40}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \max_{j\leq m} |x_j| \sigma(dx) &\simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}^m} \max_{j\leq m} |t_j| d\gamma_m(t)\\ &\geq \frac{c_1\sqrt{logm}}{\sqrt{n}} \gamma_m\left(t : \max_{j\leq m} |t_j| \geq c_1\sqrt{logm}\right)\\ &\geq \frac{c_1}{2}\left(\frac{logm}{n}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το θεώρημα του Dvoretzky. Το θεώρημα που ακολουθεί είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα 8.1.3 (αρκεί να θυμηθείτε τον ορισμό της απόστασης Banach-Mazur).

Θεώρημα 8.3.8. *Έστω* $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *χώρος με νόρμα, διάστασης* n*, ώστε η* B_2^n *να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της* B_X*. Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει υπόχωρος* F *του* X *διάστασης* $k \geq c\varepsilon^2[log^{-1}(1/\varepsilon)]logn$*, με την ιδιότητα: για κάθε* $x \in S_F$*,*

$$(1+\varepsilon)^{-1}L_r \leq \|x\| \leq L_r(1+\varepsilon). \tag{8.3.41}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα του John, έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \le \|x\| \le \|x\|_2 \tag{8.3.42}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε, το Λήμμα 8.3.6 δείχνει ότι

$$\frac{1}{2} \le \frac{M}{L_r} \le c, \tag{8.3.43}$$

όπου $M = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x)$. Από το λήμμα Dvoretzky-Rogers (Πόρισμα 7.7.3) υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{x_1, \dots, x_n\}$, με $\|x_i\| \ge \frac{1}{2}$ για $i = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις Rademacher $r_i : [0,1] \to \{-1,1\}$ με

$$r_i(t) = \text{sign}\,\text{ημ}(\pi 2^i t). \tag{8.3.44}$$

Τότε, ο τελεστής $T_t : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με

$$T_t\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i x_i \tag{8.3.45}$$

είναι ισομετρία (για όλες, εκτός από πεπερασμένες, τις τιμές του $t \in [0,1]$. Το σ είναι αναλλοίωτο ως προς τις ισομετρίες, άρα

$$M = \int_{S^{n-1}} \|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|\, d\sigma(a) = \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i(t) a_i x_i\| dt\, d\sigma(a). \tag{8.3.46}$$

Ισχυρισμός. *Για κάθε* $j = 1, \dots n$,

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t) y_i\right\| dt \ge \|y_j\|. \tag{8.3.47}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι προφανές, οπότε υποθέτουμε ότι

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i\right\| dt \ge \|y_j\| \tag{8.3.48}$$

για κάθε $j = 1, \dots, n-1$. Από την τριγωνική ανισότητα, για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$2\left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i\right\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i + y_n\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i - y_n\right\|, \tag{8.3.49}$$

οπότε, ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i\right\| dt \le \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t) y_i\right\| dt. \tag{8.3.50}$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) y_i \right\| dt \geq \|y_j\| \tag{8.3.51}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$, και η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώνεται με κυκλική εναλλαγή των y_j. □

Παίρνοντας $y_i = a_i x_i$, έχουμε

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i x_i \right\| dt \geq \max_{1 \leq i \leq n} \|a_i x_i\|. \tag{8.3.52}$$

Επιστρέφοντας στην (8.3.46) παίρνουμε

$$M \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq n} \|a_i x_i\| \, d\sigma(a) \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]} \|a_i x_i\| \, d\sigma(a). \tag{8.3.53}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το λήμμα Dvoretzky-Rogers έχουμε

$$M \geq \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]} |a_i| \, d\sigma(a), \tag{8.3.54}$$

και από το Λήμμα 8.3.7 έπεται ότι

$$M \geq c \sqrt{\frac{log[\frac{n}{2}]}{n}} \geq c' \sqrt{\frac{logn}{n}}. \tag{8.3.55}$$

Αφού $L_r \geq cM$, από το Θεώρημα 8.3.5 συμπεραίνουμε ότι, αν

$$\begin{aligned} k = [k_X(\varepsilon)] &= \left[c_3 \varepsilon^2 [log^{-1}(1/\varepsilon)] n \left(\frac{L_r}{b} \right)^2 \right] \\ &\geq c_3' \varepsilon^2 [log^{-1}(1/\varepsilon)] n \left(\frac{M}{b} \right)^2 \\ &\geq c_3'' \varepsilon^2 [log^{-1}(1/\varepsilon)] logn, \end{aligned}$$

τότε υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = k$ ώστε: για κάθε $x \in S_F$,

$$(1+\varepsilon)^{-1} L_r \leq \|x\| \leq L_r (1+\varepsilon). \tag{8.3.56}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.1.3. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/4$, οπότε $(1+\delta)^2 \leq 1 + \varepsilon$.

Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του $T(B_X)$ να είναι η B_2^n. Ορίζουμε $r(x) = \|x\|_{T(B_X)}$ και θεωρούμε τον μέσο L_r της r. Από το Θεώρημα 8.3.8, υπάρχουν $k \geq c(\delta) logn = c(\varepsilon) logn$ και k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$\frac{L_r}{(1+\delta)} \left(B_2^n \cap F \right) \subseteq T(B_X) \cap F \subset (1+\delta) L_r \left(B_2^n \cap F \right). \tag{8.3.57}$$

Αν ορίσουμε $F_1 = T^{-1}(F)$, έχουμε $d(F_1, \ell_2^k) \leq (1+\delta)^2 \leq 1+\varepsilon$. $\square$

Η γεωμετρική διατύπωση του Θεωρήματος 8.1.3 είναι η εξής: Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $k \geq c\varepsilon^2 logn$, υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, και ελλειψοειδές E στον F ώστε

$$E \subset K \cap F \subset (1+\varepsilon)E. \tag{8.3.58}$$