



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι

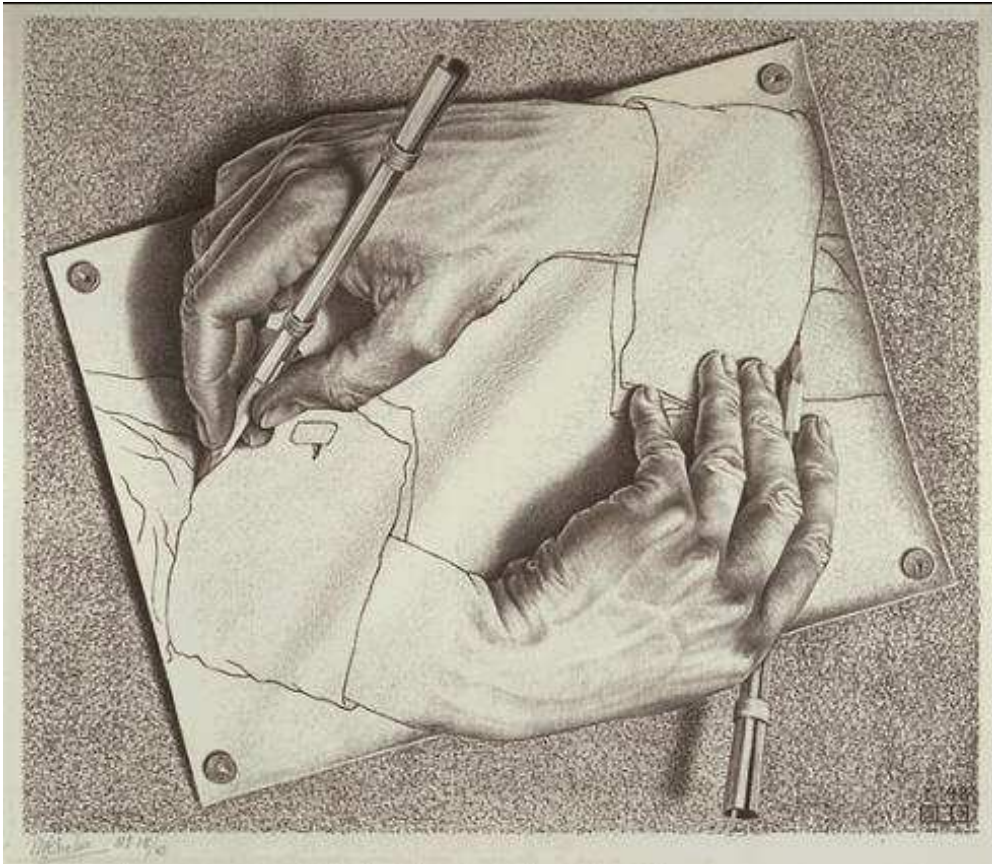
Ενότητα 9: Αναδρομή

Μιχάλης Δρακόπουλος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Αναδρομή



Πληροφορική Ι

Μ. Δρακόπουλος – 24

Αναδρομικές μέθοδοι

- Μια μέθοδος καλεί τον εαυτό της (άμεσα ή έμμεσα).
- Παραλλαγή του 'διαίρει και βασίλευε'.
 - Σπάσε το πρόβλημα σε υποπροβλήματα με την ίδια δομή.
 - Επίλυσε αναδρομικά τα υποπροβλήματα με την ίδια μέθοδο.
 - Συνδύασε τις λύσεις για τη λύση του αρχικού προβλήματος.
- Πολλά σημαντικά προβλήματα επιλύονται άμεσα αναδρομικά.
- Στενή σχέση αναδρομής και επαγωγής.

Πληροφορική Ι

Μ. Δρακόπουλος – 25

Αναδρομικός αλγόριθμος $n!$

$$n! = n \times (n - 1)!, \quad 0! = 1$$

```
function y = factorial(n)
if n == 0
    y = 1;
else
    y = n*factorial(n-1);
end
```

Βασική περίπτωση: Επιστρέφει τιμή χωρίς αναδρομική κλίση.

Αναδρομικό βήμα: $n \cdot \text{factorial}(n-1)$

- Η ακολουθία των παραμέτρων πρέπει να συγκλίνει στη βασική περίπτωση (το n θα γίνει τελικά 0).

Πληροφορική I

Μ. Δρακόπουλος – 26

Αναδρομικός αλγόριθμος $n!$ (συνεχ.)

```
factorial(5)
  factorial(4)
    factorial(3)
      factorial(2)
        factorial(1)
          factorial(0)
            return 1
          return 1*1 = 1
        return 2*1 = 2
      return 3*2 = 6
    return 4*6 = 24
  return 5*24 = 120
```

Πληροφορική I

Μ. Δρακόπουλος – 27

Αναδρομικός αλγόριθμος του Ευκλείδη

$$\text{gcd}(p, q) = \begin{cases} p & \text{αν } q = 0 \text{ (βασική περίπτωση)} \\ \text{gcd}(q, p \bmod q) & \text{διαφορετικά (αναδρομικό βήμα)} \end{cases}$$

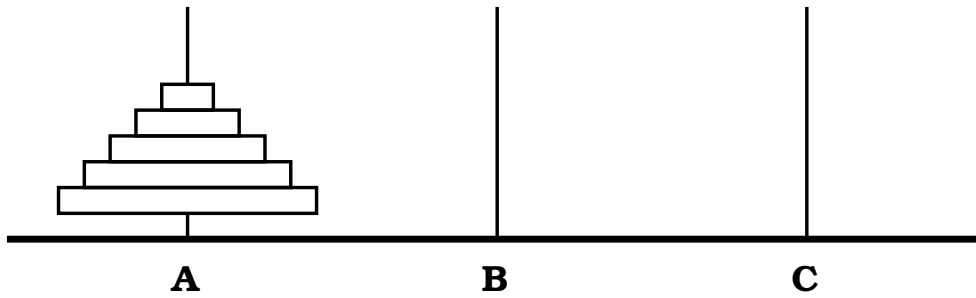
```
function m = gcd(p, q)
if q == 0
    m = p;
else
    m = gcd(q, rem(p, q));
end
```

Πληροφορική I

Μ. Δρακόπουλος – 28

Οι πύργοι του Ηανοί

Για $n = 5$ δίσκους:



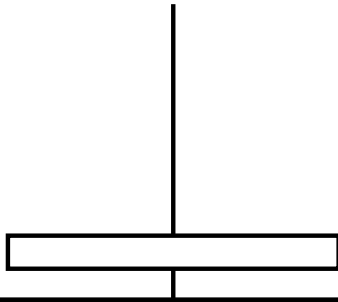
Ξεκινώντας από τη παραπάνω διάταξη, τοποθέτησε όλους τους δίσκους σε κάποιο από τους άλλους στύλους σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

- Μόνο ένας δίσκος μπορεί να μετακινείται κάθε φορά.
- Ένας δίσκος μπορεί να τοποθετηθεί είτε σε άδειο στύλο είτε πάνω σε μεγαλύτερο δίσκο.

Πληροφορική Ι

Μ. Δρακόπουλος - 29

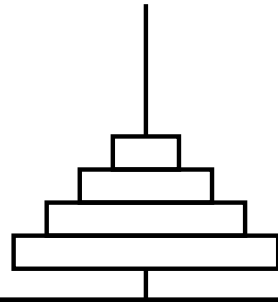
Οι πύργοι του Ηανοί (αναδρομική λύση)



A



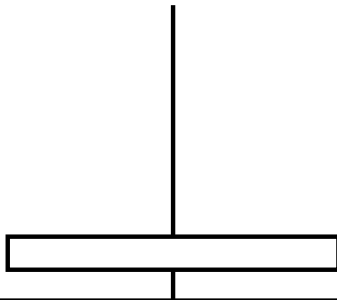
B



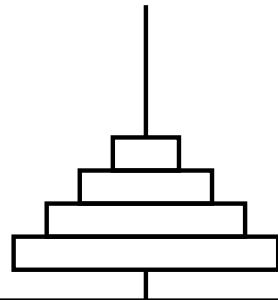
C



A



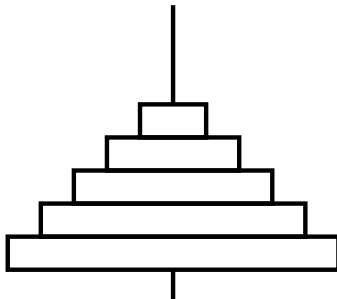
B



C



A



B



C

Αλγόριθμος για πύργους Hanoi

- Αν $n == 1$ μετακίνησε το δίσκο από *start* σε *finish*.
- Αν $n > 1$ διαίρεσε το πρόβλημα σε 3 υποπροβλήματα:
 1. Με τον ίδιο αλγόριθμο, μετακίνησε τους πάνω $n-1$ δίσκους από *start* σε *temp*. Στο βήμα αυτό, ο σύλος *finish* χρησιμοποιείται βοηθητικά.
 2. Μετακίνησε τον τελευταίο δίσκο από *start* σε *finish*.
 3. Μετακίνησε τους πάνω $n-1$ δίσκους από *temp* σε *finish*. Στο βήμα αυτό, ο σύλος *start* χρησιμοποιείται βοηθητικά.

Πληροφορική I

Μ. Δρακόπουλος – 31

Αναδρομική μέθοδος για πύργους Hanoi

```
function moveTower(n, start, finish, temp)
if n == 1
    fprintf('%s -> %s\n', start, finish);
else
    moveTower(n-1, start, temp, finish);
    fprintf('%s -> %s\n', start, finish);
    moveTower(n-1, temp, finish, start);
end
```

Παράδειγμα κλήσης για $n = 5$:

```
moveTower(5, 'A', 'B', 'C');
```

Πληροφορική I

Μ. Δρακόπουλος – 32

Αλφαριθμητικά δεδομένα (strings)

Τα αλφαριθμητικά (strings) είναι μη-αριθμητικά δεδομένα (= αλληλουχίες από χαρακτήρες). Π.χ.

```
'A' 'Pliroforiki I' 'C3PO' 'r2d2'
```

Μπορούν να ανατεθούν κανονικά σε μεταβλητές. Π.χ.

```
x = 'MATLAB rulez';
y = 'Linux 4 ever';
```

Για την εκτύπωση strings με την **fprintf** χρησιμοποιείται ο κώδικας %s.

Πληροφορική I

Μ. Δρακόπουλος – 32 α'

Ο θρύλος των πύργων του Hanoi

Το τέλος του κόσμου θα έρθει όταν μια ομάδα μοναχών καταφέρει να μετακινήσει 64 χρυσούς δίσκους σε 3 διαμαντένους στύλους.

- Έστω T_n το πλήθος των μετακινήσεων για n δίσκους, τότε:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \text{ για } n > 1, \text{ με } T_1 = 1$$

αποδεικνύεται επαγωγικά ότι

$$T_n = 2^n - 1$$

- Αν οι μοναχοί μετακινούν 1 δίσκο/sec, τότε χρειάζονται:
 - για 20 δίσκους, περισσότερο από 1 βδομάδα
 - για 30 δίσκους, περισσότερα από 31 χρόνια
 - για 40 δίσκους, 348 αιώνες
 - για 64 δίσκους, περισσότερο από 1.4 εκατομμύρια αιώνες!
- Υπολογιστής που εκτελεί 10^9 πράξεις/sec χρειάζεται αιώνες!

Πληροφορική I

M. Δρακόπουλος - 33

Προβλήματα με αναδρομή

Ο n -αρμονικός αριθμός $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$:

```
function h = H(n)
    if n == 1
        h = 1;
    else
        h = H(n-1) + 1.0/n;
    end
```

- Παράλληλη βασικής περίπτωσης: Stack Overflow Error
- Μεγάλες απαιτήσεις μνήμης.
 - Μετά από κάποιο n τελικά θα πάρουμε Stack Overflow Error.
 - Αντίθετα, ο αντίστοιχος επαναληπτικός αλγόριθμος χρειάζεται ελάχιστη μνήμη.

Πληροφορική I

M. Δρακόπουλος - 34

Προβλήματα με αναδρομή (συνεχ.)

- Περιττή επανάληψη υπολογισμων. Π.χ. ο αναδρομικός αλγόριθμος για αριθμούς Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2 \quad \text{με } F_1 = 1, F_2 = 2.$$

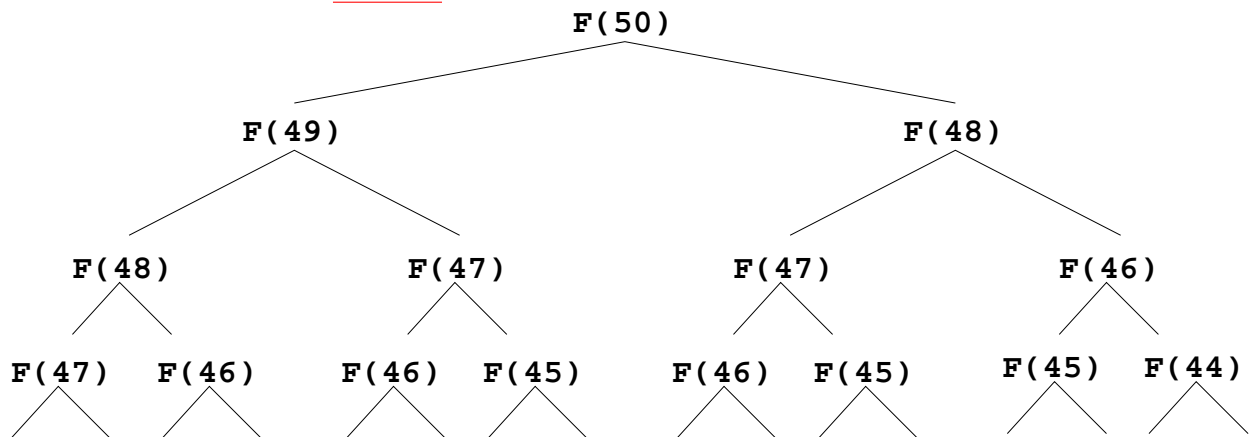
```
function fibo = F(n)
if n == 1
    fibo = 1;
elseif n == 2
    fibo = 2;
else
    fibo = F(n-1) + F(n-2);
end
```

Πληροφορική Ι

Μ. Δρακόπουλος - 35

Προβλήματα με αναδρομή (συνεχ.)

Για τον υπολογισμό του F_{50} με αναδρομή:



η $F(1)$ καλείται $F_{50} = 20,365,011,074$ φορές.

Πληροφορική Ι

Μ. Δρακόπουλος - 36

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Μιχάλης Δρακόπουλος, 2014.
Μιχάλης Δρακόπουλος. «Πληροφορική Ι. Ενότητα 9: Αναδρομή». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<http://opencourses.uoa.gr/modules/document/?course=MATH105>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Εικόνα 1. “Lógica, Epistemologia e Filosofia das Ciências”. Copyrighted. Πηγή:

<http://www.investigacoesfilosoficas.com/ii-congreso-colombiano-de-logica-epistemologia-y-filosofia-de-la-ciencia/>

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

